UPC
UNIVERSIDAD PERUANA DE CIENCIAS APLICADAS
Laureate International Universities®

**ESTUDIOS PROFESIONALES PARA EJECUTIVOS**

# EPE

**Título:** **CÁLCULO 1**
**TEORÍA Y PRÁCTICA**

**Autores:** **Alva Cabrera, Rubén**
**Sánchez Espinoza, Julio**
**Peña Lizano, Aldrin**

**Fecha:** **Enero 2014**

---

**Curso:** **CÁLCULO 1**

**Código:** **CE13**

**Área:** **Ciencias**

**Ciclo:** **2014- 0**

---

# ÍNDICE

## Unidad I

## Conceptos Básicos de Funciones


Página

- Definición de función ,dominio y rango 4
- Funciones básicas:
  - Función afín –lineal 8
  - Función cuadrática 13
  - Función exponencial 18
  - Función logaritmo 21
  - Función seno 25


## Unidad II

## Límites y Continuidad


- Límite de una función 30
- Limites laterales 30
- Continuidad de una función 32
- Limites al infinito 36
- Asíntotas horizontales 37
- Límite infinito 38
- Asíntotas verticales 38


## Unidad III

## La Derivada


- Pendiente de una recta tangente a una curva 42
- Definición de Derivada 43
- Interpretación de la Derivada 47
- Reglas de Derivación 47
- Regla de la cadena 54
- Derivadas de orden superior 58
- Derivación implícita 60
- Cálculo de formas indeterminadas 63
- Velocidad y aceleración 67

- Tasas relacionadas 69
- Gráfica de funciones - Función creciente- Función decreciente 74
- Valores extremos de una función /Máximos o mínimos relativos 75
- Criterio de la primera derivada para determinar los extremos relativos 76
- Criterio de la segunda derivada para determinar la concavidad de una curva 77
- Concavidad - Puntos de inflexión 78
- Análisis de la gráfica de una función 79
- Optimización de funciones 84
- Criterio de la segunda derivada para valores extremos 84
- Problemas de optimización 84


## Unidad IV

## La Integral


- La antiderivada. La integral indefinida. Definición 90
- Propiedades de la integral indefinida 94
- Integrales indefinidas básicas 93
- La integral definida. Teorema fundamental del cálculo. Propiedades 99
- Técnicas de integración: Sustitución, por partes y fracciones parciales 102
- Aplicaciones de la integral definida 112
- Área de una región bajo una curva 112
- Volumen de un sólido de revolución: método del disco, método de la arandela 119


## Unidad V

## Vectores


- Definición de vector 126
- Definición de magnitud, dirección y sentido 127
- Interpretación geométrica 127
- La ley de paralelogramo 129
- Producto escalar de vectores 130
- Vectores unitarios 131
- Producto vectorial de vectores 132


## Respuestas de Actividades

# UNIDAD I

# Conceptos Básicos

# Funciones

## Contenido

- Definición de función
- Dominio y rango de una función
- Funciones básicas:
    - Función lineal
    - Función cuadrática
    - Función logaritmo
    - Función exponencial
    - Función seno



**Leonard Euler**

Matemático Suizo, Nació en Basilea el 15 de Abril de 1707. Principal impulsor de la notación de una función. En 1733, con solo veintiséis años pasó a ser el principal matemático de la Academia de Ciencias de San Petesburgo, en Rusia.

## Objetivos

Al final del capítulo el alumno debe:

- Explicar el significado de función.
- Determinar el dominio de una función.
- Graficar funciones lineales, cuadráticas, logarítmicas y exponenciales.
- Graficar la función seno identificando el período, amplitud, frecuencia y desfasamiento.

# Introducción

El propósito fundamental del cálculo son las funciones. En este capítulo preliminar se prepara el camino para el cálculo, presentando los conceptos básicos referentes a las funciones como su definición, dominio, rango y gráfica. Su empleo permitirá describir modelos matemáticos de fenómenos del mundo real. Las funciones que se van a analizar seran las lineales, cuadráticas, exponencial, logarítmica y la función seno. Resulta útil comparar una función como una máquina. Si $x$ está en el dominio de la función $f$, entonces cuando $x$ entra en la máquina, se acepta como una entrada y la máquina produce una salida $f(x)$ de acuerdo con la regla de la función. De este modo, puede comparar el dominio como el conjunto de todas las entradas posibles y el rango como el conjunto de todas las salidas posibles.

Muchos fenómenos tienen un comportamiento por medio de una función. Por ejemplo la relación entre la altura del hombre (en pulgadas) respecto a su edad es una función.




Fuente: http://www.librosmaravillosos.com/matematicalife/capitulo05.html

## Definición de función

**Observación**

Si Dom $f$ no se especifica, entonces, el Dom $f$ es el conjunto más grande de valores de $x$ para los cuales $f(x)$ existe.

Una función $f$ es un conjunto formado por todos los pares ordenados de la forma $(x; f(x))$ donde se le asigna a cada elemento $x$ de un conjunto $\boldsymbol{D}$ exactamente un elemento, llamado $f(x)$.

## Dominio y Rango de una función

El conjunto $\boldsymbol{D}$ se llama dominio de la función $f$ y se denota por Dom $f$. El número $f(x)$ es el valor de $f$ en $x$.

El Rango de $f$ es el conjunto de todos los valores posibles de $f(x)$, conforme $x$ varía en todo el dominio y se denota por Ran $f$.

**Ejemplo 1:**

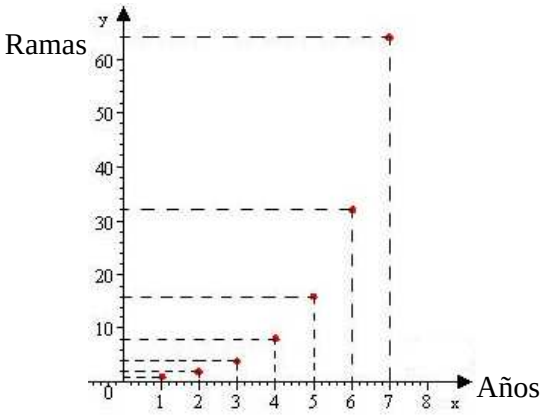
Tras establecer la relación entre el número de años de crecimiento del árbol y las ramas que tiene en cada año se obtiene el siguiente conjunto de pares ordenados que representa la función del crecimiento.

$$f = \{(1; 1), (2; 2), (3; 4), (4; 8), (5; 16), (6; 32), (7; 64)\}$$

Grafique los pares ordenados en un sistema de coordenadas rectangulares y determine el dominio y rango de la función.

**Resolución:**

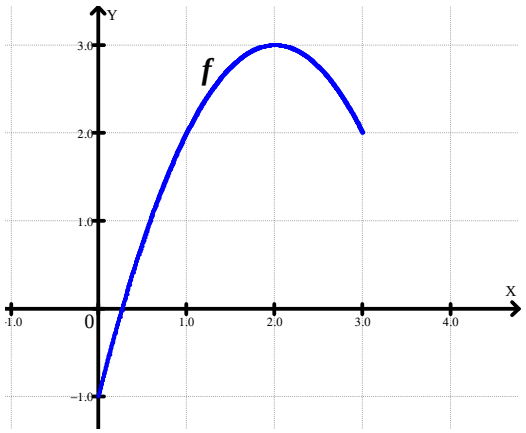
Como cada pareja ordenada representa un punto en el plano coordenado, al localizar dichas parejas se obtiene la siguiente representación gráfica de la función.




El dominio de la función $f$ es {1; 2; 3; 4; 5; 6; 7} y el rango de la función $f$ es {1; 2; 4; 8; 16; 32; 64}.

**Ejemplo 2:**

Determine el dominio y rango de la función $f$, cuya gráfica es:




**Resolución:**

**Dominio $f$** : Proyectamos la gráfica de la función $f$ sobre el eje $x$, obteniéndose un conjunto de puntos en forma de un segmento horizontal que va desde 0 a 3 con lo cual se obtiene que el dominio de la función $f$ es el intervalo [0;3], entonces: $\text{Dom}f = [0;3]$

**Rango $f$** : Proyectamos la gráfica sobre el eje $y$, obteniéndose un conjunto de puntos en forma de un segmento vertical que va desde -1 a 3 con lo cual se obtiene que el rango de la función $f$ es el intervalo [-1;3] entonces: $\text{Ran}f = [-1;3]$

**Ejemplo 3:**

Determine el dominio de las siguientes funciones

**a.** $g(x)=x^4+3x^3-23x^2+45x+12$

**Resolución**:

Como la variable *x*, no tiene restricciones puede asumir cualquier valor entonces el domino de la función $g$ es todos los números reales, se escribe: Dom$f = R$

**Observación**
Para analizar el dominio de una función con regla de correspondencia, ésta no debe simplificarse, se analiza con la regla de correspondencia original.

**b.** $g(x)=\dfrac{x^2+3x}{x}$

**Resolución**:

La condición para que la función racional $g$ sea posible evaluarla es que el denominador sea diferente de cero, es decir *x* debe ser diferente de cero, entonces el dominio de $g$ será $\boldsymbol{R}$-$\{0\}$.

**c.** $h(x)=\sqrt{x-1}$

**Resolución**:

La condición para que la función $h$ se pueda evaluar en los reales es que $x-1\geq 0$, es decir que la variable *x* debe ser mayor o igual que 1, entonces Dom$h=[1;+\infty[$

**d.** $f(x)=\dfrac{x^3+5x}{x}+\dfrac{x^2-1}{x-1}$

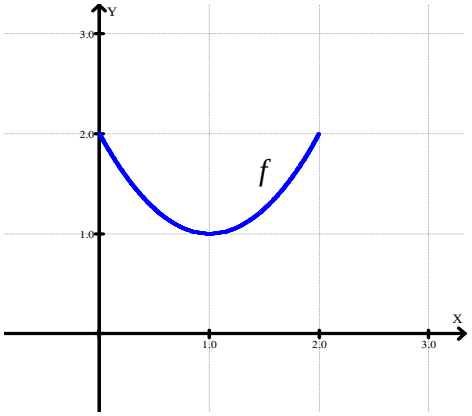
**Resolución**:

La función $f$ será posible evaluarla si los denominadores de cada uno de sus términos sean diferentes de cero, es decir: $x\neq 0$ y $x-1\neq 0$

Por lo tanto: Dom$f = R-\{0;1\}$

## ACTIVIDAD 1

1. Determine el dominio y rango de la función $f$ cuya gráfica se muestra:




**Resolución**:

2. Determine el dominio de las funciones siguientes cuyas reglas de correspondencia se dan:

   **a.** $f(x) = -x^3 + 3x^2 + 5x - 3$

**Resolución:**

   **b.** $f(x) = \dfrac{x^3 + 8x^2 + 5x}{x^2 - x}$

**Resolución:**

   **c.** $f(x) = \sqrt{3 - x}$

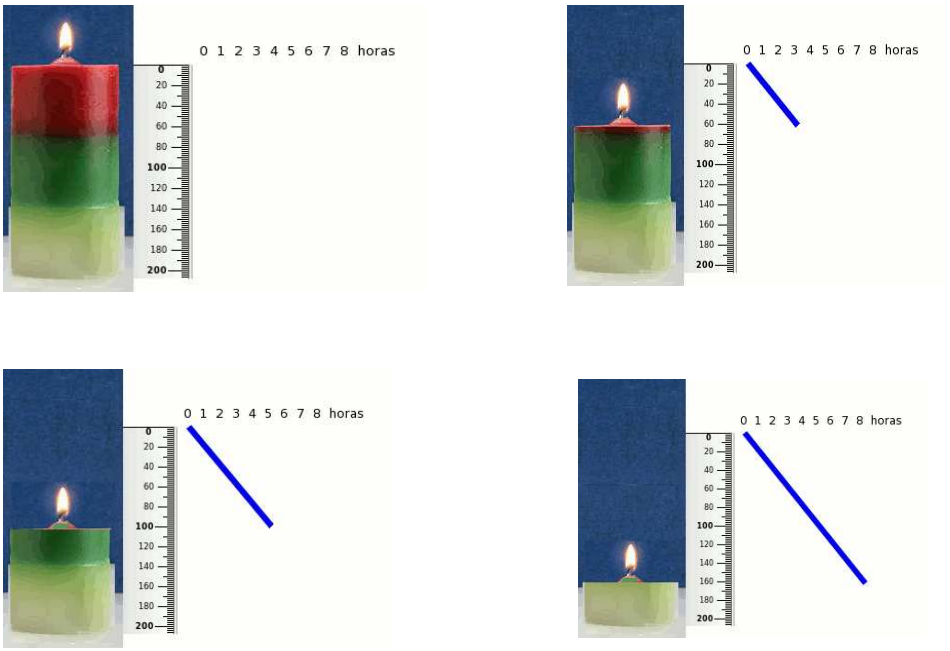
**Resolución:**

# FUNCIONES BÁSICAS

A continuación se mostrarán las funciones afín lineal, cuadrática, exponencial, logaritmo y seno.

## 1. FUNCIÓN AFÍN LINEAL

En las gráficas que a continuación se muestran, se puede observar como varía el consumo de una vela en mm en distintos instantes




Fuente: http://recursostic.educacion.es/secundaria/

Al inicio la vela mide 200 mm, después de 4 horas se ha consumido 60 mm, después de 6 horas se ha consumido 100 mm y después de 8 horas se han consumido 160 mm, como se ve en la última figura, originándose 4 puntos (0;0) ,(4;60), (6;100) y (8;160). Si unimos todos los puntos se forma una línea, la cual será la gráfica de una función a la que llamaremos **afín lineal**.

**La función** $f$ que pasa por los puntos $P(x_1;y_1)$ y $Q(x_2;y_2)$ se llamará **afín lineal** de *x*, si tiene la siguiente regla de correspondencia $y = f(x) = mx + b$, $b \neq 0$

donde *m* es la pendiente, y se determina de la siguiente manera $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

y b es la intersección de la función $f$ con el eje *y*.

**Observación**:
Si $b = 0$ la función será $y = f(x) = mx$ y se le llamará función lineal.

**Ejemplo 1:**

Determine la regla de correspondencia $y = f(x) = mx + b$ , de una función afín $f$ que pasa por los puntos (0; 2) y (4; 0).

**Resolución**:

La regla de correspondencia es de la forma: $y = f(x) = mx + b$

Determinando la pendiente $m = \dfrac{0-2}{4-0} = \dfrac{-1}{2} = -0{,}5$

entonces la regla de correspondencia de la función $f$ será $f(x) = -0{,}5x + b$

y como $f$ , pasa por (0; 2) entonces $b$= 2 , por lo tanto la regla de correspondencia de la función afín lineal $f$ será : $f(x) = -0{,}5x + 2$

**Ejemplo 2:**

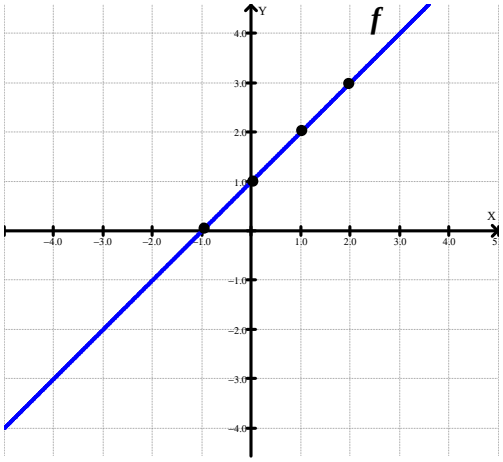
Grafique la función afín lineal $f$, cuya regla de correspondencia es $f(x) = x + 1$

**Resolución:**

Tabulando valores:

| ***x*** | ***y*** |
|---|---|
| 0 | 1 |
| -1 | 0 |
| 1 | 2 |
| 2 | 3 |

De la tabla se obtienen los puntos (0;1), (-1,0), (1;2) y (2;3), estos se ubican en el plano cartesiano y luego se traza una recta que pase por dichos puntos, obteniéndose la gráfica de la función.




**Ejemplo 3:**

La siguiente gráfica muestra la cantidad, en miles, de turistas extranjeros que arribaron al Perú entre los años 2002 al 2008. Halle la regla de correspondencia de la función afín lineal que describa este comportamiento, teniendo en cuenta lo siguiente:

*y*: número de turistas, en miles.

*x* : año de estudio, considere *x*=0 para el año 2002.




**Resolución:**

La función $f$ será de la forma $f(x) = mx + b$ y como pasa por los puntos (1; 1070) y (6; 1949), entonces su pendiente será:

$$m = \frac{1070 - 1949}{1 - 6} = 175{,}8$$

la regla de correspondencia de la función $f$ es : $f(x) = 175{,}8x + b$

Para determinar el valor de *b* se reemplaza el punto (1;1070) en la ecuación

$175{,}8(1) + b = 1070$ resolviendo se obtiene *b* = 894,2

Por lo tanto la regla de correspondencia de la función afín $f$ será: $f(x) = 175{,}8x + 894{,}2$

**Ejemplo 4:**

En cierto país europeo, cada factura de teléfono incluye 25 euros por el alquiler de la línea y una tarifa de 0,07 euros/minuto por cada una de las llamadas. Determine la regla de correspondencia de la función $f$ la cual es $y = f(x) = mx + b$ , que relaciona el costo de la factura (*y*) con el tiempo de utilización del teléfono (*x*). ¿A cuánto ascenderá la factura, si el tiempo de utilización de la línea ha sido de 100 minutos?

**Resolución:**

Analizando la información se deduce que:

Si no realiza ninguna llamada pagaría 25 euros

Si realiza un minuto de llamadas pagaría 25 + 0,07 = 25,07 euros

Si realiza 2 minutos de llamadas pagaría 25+0,07+0,07=25,14 euros

Si realiza 3 minutos de llamadas pagaría 25+0,07+0,07+0,07=25,21 euros

así sucesivamente.

Toda esta información se ordena en un cuadro

| Tiempo en minutos | Costo en euros |
|---|---|
| 0 | 25 |
| 1 | 25,07 |
| 2 | 25,14 |
| 3 | 25,21 |

Se han originado los siguientes puntos (0;25) ,(1;25,07),(2;25,14) y (3;25,21) , considerando a los dos primeros puntos para determinar la pendiente *m* y la intersección con el eje *y* que es *b*

entonces se tendrá $m = \dfrac{25{,}07 - 25}{1 - 0} = 0{,}07$

y como pasa por $x = 0$ cuando $y = 25$ entonces tendremos $b = f(0) = 25$

Por lo tanto la regla de correspondencia de $f$ es: $y = f(x) = 0{,}07x + 25$

## ACTIVIDAD 2

1. Determine la regla de correspondencia de la función afín lineal $f$ que pasa por los puntos P(1;1) y Q(-1;3).

   **Resolución**:

2. Grafique la función afín $f$ cuya regla de correspondencia es $f(x)=\frac{-2x}{3}+2$

   **Resolución**:

3. Determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

   **a.** Si dos funciones afín lineales tienen la misma pendiente, entonces tendrán siempre las mismas reglas de correspondencia.

   **b.** Toda gráfica de una función afín siempre cruza tres cuadrantes.

   **Resolución**:

## 2. Función Cuadrática

En nuestra vida cotidiana, existen muchas situaciones que se modelan por medio de una función cuadrática, también existen objetos que tienen la forma de su representación gráfica. Por ejemplo el lanzamiento de una bala en una competencia deportiva presenta una trayectoria parabólica, descrita por una función cuadrática, como se observa en la figura.



Fuente: http://ampliar-el-aula.blogspot.com/2010/09/funcion-cuadratica.html

La regla de correspondencia de la función cuadrática es $\boldsymbol{f(x) = ax^2 + bx + c}$

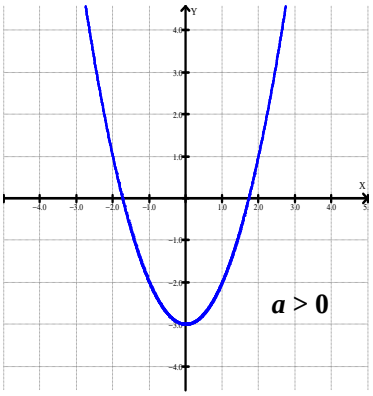
donde $a$, $b$ y $c$ son números reales con $a \neq 0$, y $x$ es la variable real.

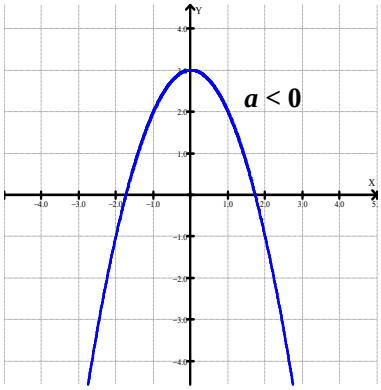
La gráfica de una función cuadrática es una **parábola** con eje vertical y vértice $V(h; k)$

donde : $h = \dfrac{-b}{2a}$ y $k = f(h)$

**Observación**
La intersección de la función cuadrática con el eje $y$ es el punto (0;c)

La parábola se abre hacia arriba si $\boldsymbol{a > 0}$, y se abre hacia abajo si $\boldsymbol{a < 0}$




**Ejemplo 1**:

Considere la función cuadrática: $f(x) = x^2 - 6x + 5$

a. Determine su vértice.
b. Determine los puntos de cortes de la gráfica de $f$ con los ejes coordenados
c. Trace la gráfica de $f$
d. Indique el dominio y rango

**Resolución**:

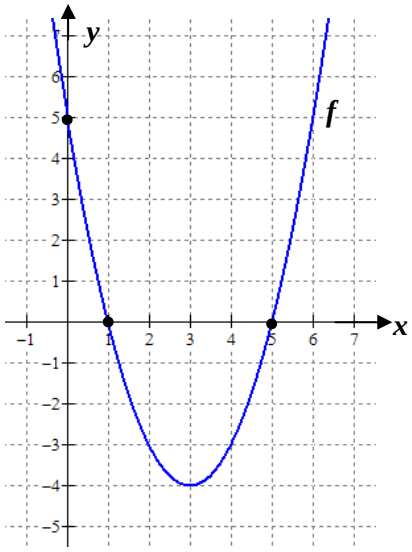
a. Se identifican los coeficientes de la función cuadrática: $a = 1$ y $b = -6$, luego se determina el vértice V($h$;$k$), donde:

$$h = -\frac{b}{2a} = -\frac{-6}{2(1)} = 3 \ , \ k = f(3) = (3)2 - 6(3) + 5 = -4 \Rightarrow V(h;k) = (3;5)$$

b. Para determinar las intersecciones de la función cuadrática y el eje $x$: $y = 0$, $x^2 - 6x + 5 = 0$ resolviendo se deduce que $x = 1 \vee x = 5$ reemplazando estos valores en $F$ se determinan los puntos $(1;0)$ y $(5;0)$.

Para determinar la intersección con el eje y: $x = 0$, con ello se encuentra el punto $(0;5)$ .

c. Para graficar la función cuadrática, primero se ubica el vértice, luego las intersecciones con los ejes coordenados en el plano cartesiano y finalmente se traza la curva




d. Proyectando la gráfica sobre el eje $x$, obtenemos toda la línea horizontal del eje $x$, por lo tanto el dominio de la función $f$ será todos los números los reales. Dom$f = R$

Proyectando la gráfica sobre el eje y, obtenemos una línea vertical que empieza de $-4$ y sigue hacia arriba, por lo tanto Ran $f = [-4;+\infty[$

**Ejemplo 2**:

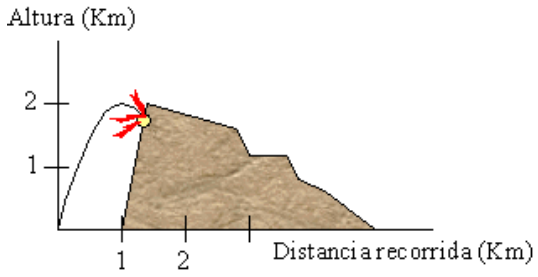
Se lanza un proyectil y la altura alcanzada $\boldsymbol{y}$ (en Km) y los kilómetros recorridos $\boldsymbol{x}$ están relacionados por la función cuadrática $f$ cuya regla de correspondencia es:

$$y = f(x) = -2x^2 + 4x$$

A 1 km del lugar de lanzamiento se encuentra una montaña cuya ladera sigue una función afín lineal $g$ cuya regla de correspondencia es la recta de ecuación:

$$y = g(x) = 6x - 6$$

Halle el punto de la montaña donde se producirá el impacto.




**Resolución**:

Observe del gráfico que el punto donde ocurre el impacto está determinado por la intersección de la parábola y la recta, por lo tanto se igualan las reglas de corespondencia de dichas funciones: $-2x^2 + 4x = 6x - 6$

Resolviendo la ecuación se obtiene aproximadamente que $x$ = 1,30 , reemplazando en la función $f$ o $g$ se obtiene $y$ =1,82 .

Por lo tanto el proyectil recorrió una distancia de 1,3 km y alcanzó una altura de 1,82 km.

## ACTIVIDAD 3

1. Dada la función cuadrática $f$ tal que : $f(x) = -x^2 + 2x + 15$

   a. Determine su vértice.
   b. Determine los puntos de cortes de la gráfica de $f$ con los ejes coordenados.
   c. Trace la gráfica de $f$.
   d. Halle el dominio y rango de $f$.

**Resolución**

2. Determine el máximo valor de la función $f$, cuya regla de correspondencia es:

$$f(x) = -x^2 + 12x$$

**Resolución:**

3. Determine el mínimo valor de la función $f$, cuya regla de correspondencia es:

$$f(x) = x^2 - 20x$$

**Resolución:**

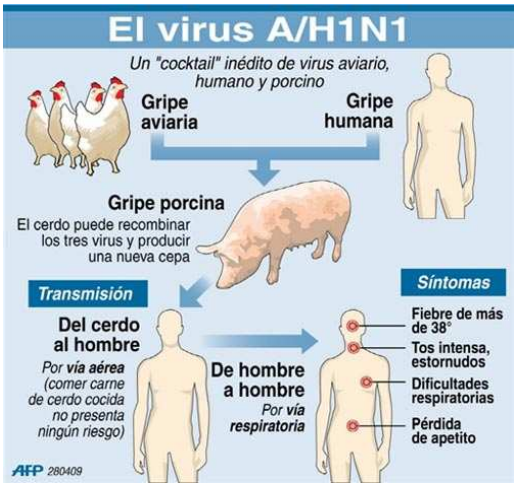
## 3. FUNCIÓN EXPONENCIAL

La regla de correspondencia de una función exponencial, presenta la forma: $f(x) = a^x$

donde la base *a* es una constante positiva y diferente de uno.

En la naturaleza y en la vida social existen numerosos fenómenos que se rigen por leyes de crecimiento exponencial. Tal sucede, por ejemplo, en el aumento de un capital invertido a interés continuo o en el crecimiento de las poblaciones. En sentido inverso, también las sustancias radiactivas siguen una ley exponencial en su ritmo de desintegración para producir otros tipos de átomos y generar energía y radiaciones ionizantes.

También la expansión de una enfermedad, como la gripe porcina, se comporta como una función exponencial.




Fuente: http://www.radiansschool.org/virusAH1N1.html

**Ejemplo 1:**

Grafique la siguiente función *f*, cuya regla de correspondencia es $f(x) = 2^x$

indicando su domino, rango, intersecciones con los ejes coordenados y la ecuación de su asíntota.

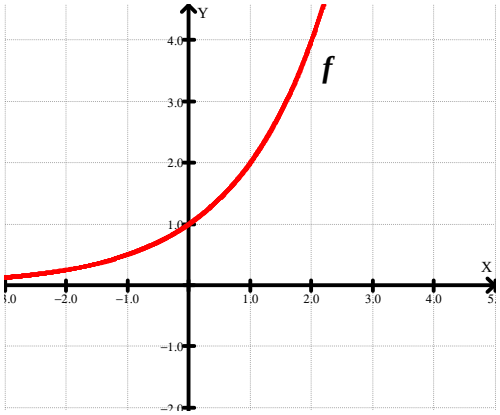
**Resolución:**

Se tiene: $f(x) = 2^x$

Tabulando:

| *x* | *y* |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 1 | 2 |
| 2 | 4 |
| -1 | 0,5 |
| -2 | 0,25 |

Se obtienen los siguientes puntos (0;1) ,(1;2) ,(2;4),(-1;0,5) y (-2;0,25). Al ubicarlos en el plano cartesiano y unirlos mediante una curva se logra la figura mostrada




**Observación**

La ecuación $f(x) = e^x$ define a la función exponencial de base **e**.

$$e = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

$e \approx 2{,}7182818284....$

Luego:

Dom $f$ = R  Rang $f$ = $]0;+\infty[$

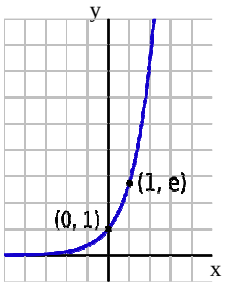
Intersección con el eje $y$: (0;1)  No tiene intersección con el eje $x$.

La gráfica de la función $f$ se acerca al eje $x$, pero no lo intersecta, este comportamiento del eje $x$ corresponde al de una asíntota por lo tanto la ecuación de dicha asíntota es $y = 0$.

## Ejemplo 2:

El INEI utiliza una fórmula muy similar a ésta $N(t) = 25939e^{0{,}01497\,t}$ para predecir la población, donde $N$ es la cantidad de peruanos en miles y $t$ es el tiempo en años.

**Gráfica de $f(x)=e^x$**




Determine:

a. La cantidad inicial de habitantes.
b. ¿Cuántos habitantes habrá aproximadamente dentro de 6 años?

**Resolución:**

**a.** Para determinar la cantidad inicial de habitantes se considera $t = 0$ con lo cual $N(0) = 25939$ , entonces la población inicial será de 25 939 000 habitantes.

**b.** Para determinar la cantidad de habitantes luego de 6 años se considera $t = 6$ con lo cual $N(6) = 28\,376{,}678$ , entonces la cantidad de habitantes después de 6 años será de 28 376 678 habitantes.

## ACTIVIDAD 4

**1.** Grafique la siguiente función $f$, cuya regla de correspondencia

$$f(x) = e^x + 2$$

indicando domino, rango, intersecciones con los ejes coordenados y la ecuación de su asíntota.

**Resolución:**

**2.** Determine el intercepto con el eje $x$ de la gráfica de la siguiente función $f$, cuya regla de correspondencia es : $f(x) = 2(5)^x - 1250$

**Resolución:**

# 4. FUNCIÓN LOGARITMO

¿Hay situaciones de la vida diaria donde se usen las escalas logarítmicas?

Pues sí, se usan en algo tan cotidiano como ¡el champú!. Habrás visto que en los frascos de champú a veces se indica: "ph neutro". ¿Qué es el ph?.

El ph es la concentración de iones de hidrógeno en una disolución química. El número de iones de la concentración está dado en potencias de 10: $10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}, \ldots$

El ph es el número opuesto a ese exponente; es decir, el opuesto del logaritmo. El ph mide el carácter ácido o básico de los jabones, lociones, champús, etc. Con ph = 7se dice que es neutro y suele recomendarse por no ser agresivo con la piel y el cabello. Un ph inferior a 7 corresponde a una disolución ácida; si es superior a 7, es básica.

**Recordar:**

$y = \log_a(x)$

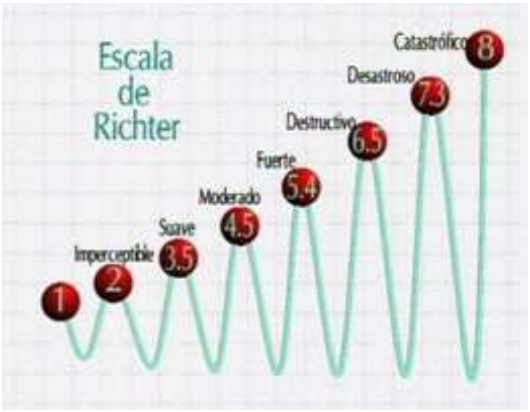
$\Leftrightarrow x = a^y$

Ejemplo

$\log_5(625) = 4$

porque $5^4 = 625$

La escala logarítmica más conocida es la escala de Richter para medir la intensidad de los terremotos. Se mide la energía liberada en un terremoto, mediante la amplitud máxima de las ondas que registra el sismógrafo. Dado que llega a haber diferencias enormes entre unos y otros casos, se define la magnitud del sismo utilizando logaritmos




Fuente: http://www.rtve.es/aventura/mas-por-menos/webcap12/actividades_parte_3.html

## La Función Logaritmo en base a

Es la función cuya regla de correspondencia es: $\boldsymbol{f(x) = \log_a x}$

donde, la base *a* es una constante positiva y distinto de 1, *x* es mayor que cero.

Si $a = 10$, entonces $f(x) = \log_{10}(x) = \log(x)$ , y se llamará **logaritmo decimal**.

Si $a = e$, entonces la función $f$ se escribirá como $f(x) = \log_e(x) = \ln(x)$

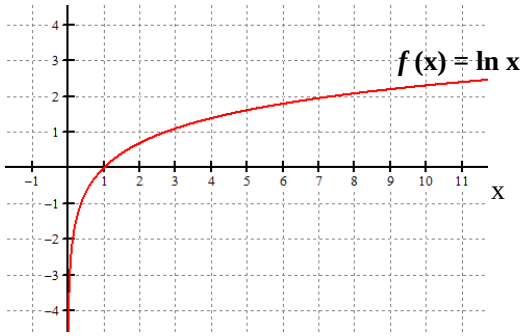
y se llamará **logaritmo natural o neperiano.**

y

**Nota:**

Cuando el logaritmo está en base 10, no es necesario indicar la base.

$\log_{10} x = \log x$




**Ejemplo 1**:

Grafique $f(x)=\log_a x$, si $a = 2$

**Resolución:**

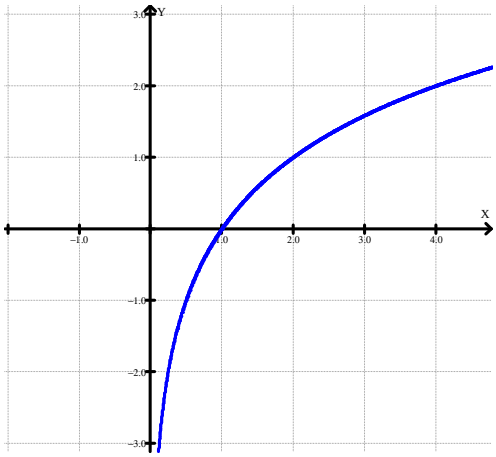
Como $y=\log_a(x) \Leftrightarrow x=a^y$, se tiene: $x= 2^y$,

Luego tabulando algunos valores se obtiene la tabla

$\log_2 1=0$
$\log_2 2=1$
$\log_2 4=2$
$\log_2 0{,}5=-1$

| *x* | *y* |
|---|---|
| 1 | 0 |
| 2 | 1 |
| 4 | 2 |
| 0,5 | –1 |
| 0,25 | –2 |

Ubicando los puntos en el plano cartesiano y uniéndolos por medio de una curva se obtiene la siguiente gráfica:




Dominio $f$ = $]0;+\infty[$ Rango $f$ = R

Intersección con el eje $x$: (1;0) No tiene intersección con el eje $y$

La ecuación de su asíntota es $x = 0$.

**Ejemplo 2**:

La fuerza de un terremoto medida por la escala Richter está dada por la expresión

$$R = \log(\frac{E}{I_0})$$

donde *E* es la intensidad de las vibraciones del terremoto medido e $I_0$ es la intensidad de un terremoto estándar.

El 14 de mayo de 1 995, el servicio de información nacional de terremotos de los EEUU informó un terremoto en el sur de California que midió 3 en la escala de Ritcher, pero pocas personas se dieron cuenta de esto.

Anteriormente, ese mismo año, el 17 de enero, un terremoto de Kobe, Japón, dejó 2 000 muertos y billones de dólares en daños este midió 7,2 en la escala Ritcher.

¿Cuán más intenso fue el terremoto de Kobe respecto al de California?

**Resolución**:

Del terremoto de California se tiene:

$$3 = \log(\frac{E_1}{I_0})$$

Del terremoto de Kobe se tiene: $7{,}2 = \log(\frac{E_2}{I_0})$

Despejando la intensidad tenemos: $E_1 = 10^3 I_0 \qquad E_2 = 10^{7,2} I_0$

Dividiendo las intensidades

$$\frac{E_2}{E_1} = \frac{10^{7,2} I_0}{10^3 I_0} = 10^{4,2} \approx 15848{,}93192$$

Luego el terremoto de Kobe tuvo aproximadamente una intensidad de 15849 veces el terremoto de California.

## ACTIVIDAD 5

**1**. Grafique la siguiente función $f$ cuya regla de correspondencia es: $f(x)=\ln(x-5)$ indicando dominio, rango ,intersecciones con los ejes coordenados y la ecuación de su asíntota.

**Resolución:**

**2.** Determine las coordenadas del punto de intersección de la gráfica de la función $f$ con el eje $x$ .Siendo su regla de correspondencia: $f(x)=3\ln(2-x)+1$

**Resolución:**

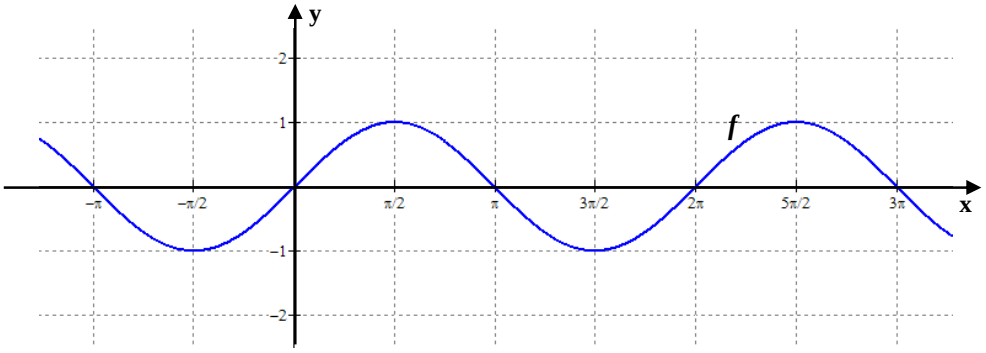
## 5. FUNCIÓN SENO

En física, una onda es una propagación de una perturbación de alguna propiedad de un medio, por ejemplo densidad, presión, campo eléctrico o campo magmático, que se propaga a través del espacio transportando energía.

El medio perturbado puede ser de naturaleza diversa como aire, agua, un trozo de metal, el espacio o el vacío. Su gráfica de una onda es una función senoidal.

La regla de correspondencia de la función seno es: $\boldsymbol{f(x) = \text{sen } x}$

significa el seno del ángulo cuya medida en radianes es *x*.




Dominio: R. (no hay ninguna restricción para la variable *x*) Rango: $[-1;1]$

T = Periodo = $2\pi$ (Cada $2\pi$ se repita el mismo bloque) Frecuencia: $\dfrac{1}{2\pi}$

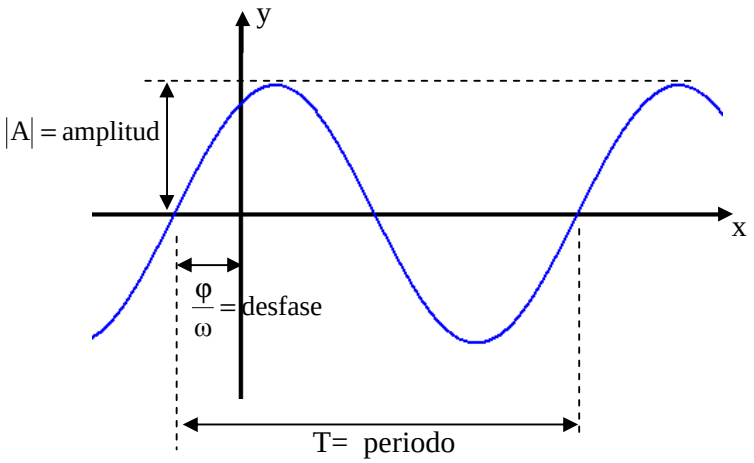
Desfase: 0 rad ( un periodo empieza por el origen )

En general se puede expresar como $f(x) = A\text{sen}(\omega x - \varphi)$

Donde

$|A|$ = Amplitud $\qquad T$ = Periodo = $\dfrac{2\pi}{\omega}$

$\dfrac{\varphi}{\omega}$ = desfasamiento $\qquad f$ = Frecuencia = $\dfrac{1}{T}$

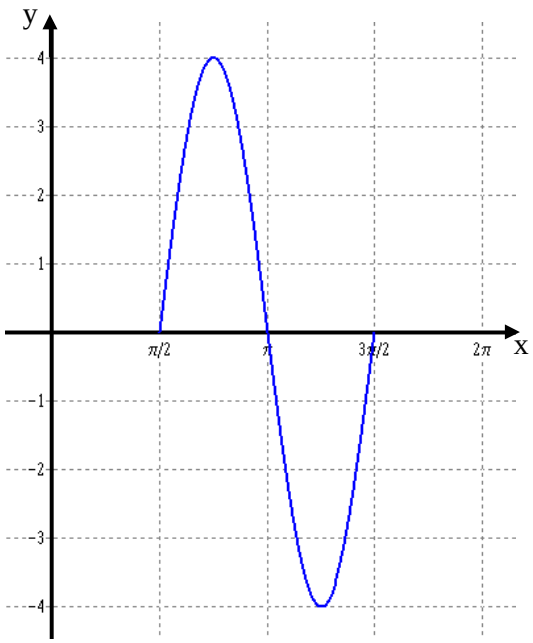


**Ejemplo**:

Determine la amplitud,periodo , frecuencia y grafica de $f(x) = 4\text{sen}(2x - \pi)$

**Resolución:**

Amplitud: $|4| = 4$ Periodo: $\frac{2\pi}{2} = \pi$ Desfase: $\frac{\pi}{2}$ a la derecha



## ACTIVIDAD 6

**1.** Grafique la función $f$, cuya regla de correspondencia es $f(x) = 5\text{sen}(4x - \frac{\pi}{2})$
Indicando amplitud, periodo, desfase y frecuencia.

**Resolución:**

# UNIDAD II

# Límites y continuidad

## Contenido

- Límite de una función
- Limites laterales
- Continuidad de una función
- Limites infinitos
- Asíntotas horizontales
- Asíntotas verticales

## Objetivos

Al final del capítulo el alumno debe:

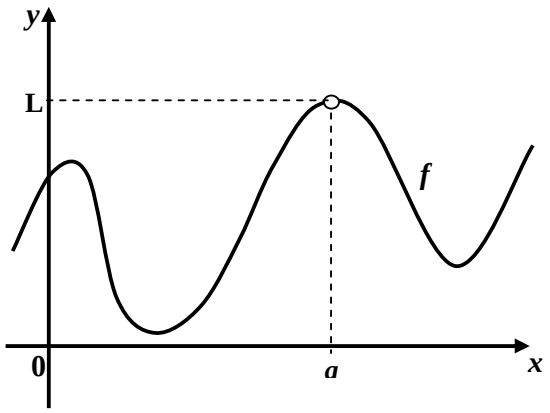
- Calcular el límite de una función en un punto.
- Interpretar geométricamente el límite de una función en un punto.
- Reconocer las formas indeterminadas.
- Calcular formas indeterminadas
- Calcular límites infinitos y al infinito.
- Determinar las asíntotas horizontales y verticales.
- Interpretar geométricamente las asíntotas horizontales y verticales.

## Introducción

La idea de límite de una función está relacionada con los valores que toma la función en lugares cercanos a cierto punto. Por lo tanto, cuando se diga "**límite de una función en algún punto**", se deberá entender que interesa saber el comportamiento de la misma en una zona **muy cercana** a dicho punto.

**Definición de límite**: Sea $f$ una función definida en un intervalo abierto alrededor de $a$ (no necesariamente en $a$).

Se expresa $\lim_{x\to a} f(x) = L$ y se dice que el límite de $f(x)$ cuando $x$ tiende hacia $a$, es igual a L.

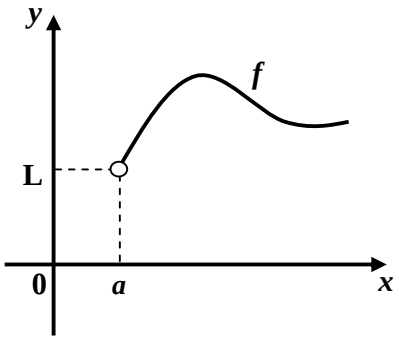



### Definición de límite lateral derecho

Sea $f$ una función definida en $]a;+\infty[$.

Se expresa: $\lim_{x\to a^+} f(x) = L$

y se dice que el límite de $f(x)$ cuando $x$ tiende hacia $a$ desde la derecha ( $x > a$) es igual a **L**.

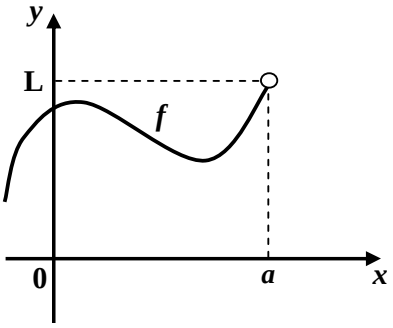



### Definición de límite lateral izquierdo

Sea $f$ una función definida en $]-\infty;a[$.

Se expresa $\lim_{x\to a^-} f(x) = L$

y se dice que el límite de $f(x)$ cuando $x$ tiende hacia $a$ desde la izquierda ( $x < a$), es igual a **L.**



## Unicidad del límite

Si el límite de $f(x)$ cuando $x$ tiende hacia $a$ existe, entonces es único.

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = L$$

Si los límites laterales coinciden entonces podemos afirmar que $\lim_{x\to a} f(x) = L$

Caso contrario el límite no existe.

## Límites de funciones básicas

a) $\lim_{x\to a} k = k$ b) $\lim_{x\to a} x = a$

c) $\lim_{x\to a} x^n = a^n$ d) $\lim_{x\to a} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a}$ , si n es par $a > 0$

## Propiedades de límites

Si $\lim_{x\to a} f(x) = L$ **y** $\lim_{x\to a} g(x) = M$ , entonces:

a) $\lim_{x\to a} \big(f(x) \pm g(x)\big) = L \pm M$

b) $\lim_{x\to a} \big(f(x) \cdot g(x)\big) = L \cdot M$

c) $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{L}{M}; M \neq 0$

**Formas indeterminadas**

Si tenemos un límite de la forma

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

donde tanto $f(x) \to 0$ como $g(x) \to 0$ cuando $x \to a$ se llama forma indeterminada 0/0, este límite puede existir o no.
Los tipos de formas indeterminadas que se estudiaran en este libro son: $\frac{0}{0}; \frac{\infty}{\infty}$

**Ejemplos**

Calcule los siguientes límites:

**a**. $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^2+1}{x^3+2}$

**Resolución:**

Aplicando las propiedades de los límites se tiene: $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^2+1}{x^3+2} = \dfrac{1+1}{1+2} = \dfrac{2}{3}$

**b**. $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^2-3x+2}{x^2-x-2}$

**Resolución:**

Cuando se evalúa la expresión y se obtiene la forma 0/0 , que es una forma indeterminada, se procede a factorizar el numerador y denominador, para luego simplificar y finalmente calcular el límite.

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-3x+2}{x^2-x-2} = \frac{4-6+2}{4-2-2} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x-1)}{(x-2)(x+1)} = \lim_{x\to 2} \frac{x-1}{x+1} = \frac{1}{3}$$

**c.** $\lim_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}$

**Resolución:**

Cuando después de evaluar se obtiene 0/0 y hay una expresión irracional, se recomienda racionalizar, luego simplificar y finalmente calcular el límite.

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}=\frac{1-1}{1-1}=\frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}\times\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1}=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x}+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt{x}+1}=\frac{1}{2}$$

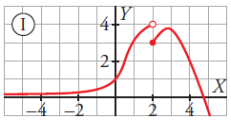
## Continuidad de una función

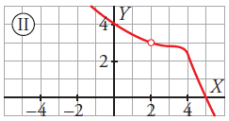
Una función $f$ es continua en un número **a** si $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$

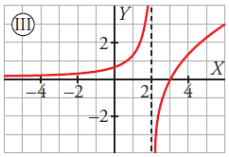
Si una función no es continua se dice que es discontinua**.**

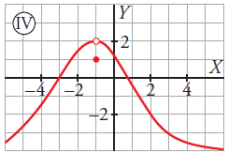
**Funciones Discontinuas**

Una función discontinua puede presentar alguna de estas formas




**Ejemplo:**

Sea $f$ continua en todos los reales cuya regla de correspondencia es:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-4}{x-2} & x<2\\ ax^2-bx+3 & 2\le x<3\\ 2x-a+b & x\ge 3\end{cases}$$

Halle los valores de $a$ y $b$.

**Resolución:**

Como $f$ es continua en todos los reales, en particular es continua en $x$=2 y $x$=3

Si $f$ es continua en $x$ = 2 se debe cumplir: $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=f(2)$

**Primero**, se determinará el límite de la función $f$ cuando $x$ tiende a 2 por la izquierda

$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^-}\frac{x^2-4}{x-2}=\frac{0}{0}\ \text{(forma indeterminada)}$$

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{(x-2)(x+2)}{x-2}=\lim_{x\to 2^-}(x+2)=4$$

**Segundo**, se determinará el límite de la función $f$ cuando $x$ tiende a 2 por la derecha

$$\lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^+}(ax^2-bx+3)=4a-2b+3$$

**Tercero**, se determinará el valor de $f(2)$

$f(2) = 4a - 2b + 3$

Como los 3 resultados deben ser iguales, se obtendrá la primera ecuación $4a - 2b = 1$

Si $f$ es continua en $x = 3$ se debe cumplir $\lim_{x \to 3^-} f(x) = \lim_{x \to 3^+} f(x) = f(3)$

Siguiendo en forma análoga el proceso anterior

**Primero**, se determina el límite de la función $f$ cuando $x$ tiende a 3 por la izquierda

$$\lim_{x \to 3^-} f(x) = \lim_{x \to 3^-} (ax^2 - bx + 3) = 9a - 3b + 3$$

**Segundo**, se determina el límite de la función $f$ cuando $x$ tiende a 3 por la derecha

$$\lim_{x \to 3^+} f(x) = \lim_{x \to 3^+} (2x - a + b) = 6 - a + b$$

**Tercero**, se determina el valor de $f(3)$: $f(3) = 6 - a + b$

Como los 3 resultados deben ser iguales, obtenemos la segunda ecuación $10a - 4b = 3$

Resolviendo el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 4a - 2b = 1 \\ 10a - 4b = 3 \end{cases}$$

El valor de $a$ será 1/2 y el $b$ será 1/2.

**ACTIVIDAD 1**

1. Calcule los siguientes límites:

**a.** $\lim_{x\to 2} \dfrac{2x^2+1}{x^2+6x-4}$.

**Resolución**

**b.** $\lim_{x\to -4} \dfrac{\sqrt{x^2+9}-5}{x+4}$

**Resolución**

**c.** $\lim_{x\to 4} \dfrac{x^2-4x}{x^2-3x-4}$

**Resolución**

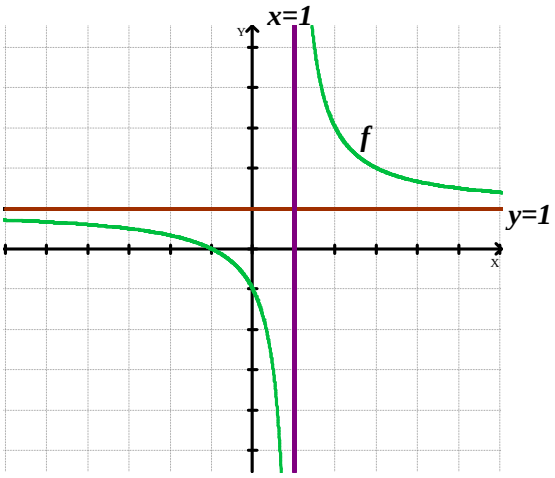
2. Sea $f(x)=\begin{cases} a+5\log(13-x) & x<3 \\ b & x=3 \\ e^{x-3} & x>3 \end{cases}$

Si $f$ es continua en $x = 3$, halle los valores de $a$ y $b$.

**Resolución:**

## Asíntotas Horizontales y Verticales

En la figura adjunta las rectas x = 1, y = 1 se llaman asíntotas.




Observa que para valores de *x* próximos a 1 el valor de *y* se hace cada vez más grande o más pequeño (dependiendo si los valores próximos a 1 los tomamos a la derecha o izquierda de 1). De igual forma, para valores muy grandes o muy pequeños de la variable *x* el valor de la variable *y* se va aproximando a 1 (recta horizontal).

## Límite al infinito

Si los valores de la función $f(x)$ tiende al número L cuando ***x*** aumenta ilimitadamente, se escribe $\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$

**Observación:**

$$\lim_{x\to+\infty} x^n = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^n} = 0$$

Si los valores de la función $f(x)$ tiende al número M cuando *x* disminuye ilimitadamente, se escribe $\lim_{x\to-\infty} f(x) = M$

Para calcular los límites al infinito de funciones racionales, divida el numerador y denominador entre *x* elevado al grado del denominador y calcule el límite de la nueva expresión

**Ejemplos**

Calcule los siguientes límites:

1. $\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2}{x^2 - 2x}$

**Resolución:**

Como el grado del denominado es 2,se divide al numerador y denominador entre $x^2$, se simplifica y calcula el límite respectivo.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{2x^2}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} - \frac{2x}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{1 - \frac{2}{x}} = 2$$

2. $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{5x^2+3x-2}{3x^3-4x+1}$

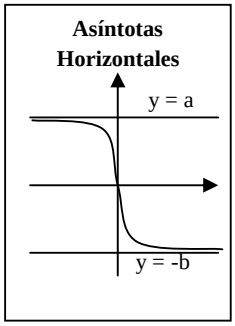
**Resolución:**

Como el grado del denominador es 3, se divide al numerador y denominador entre $x^3$

Obteniendo el límite respectivo.

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{5x^2+3x-2}{3x^3-4x+1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{5x^2}{x^3}+\frac{3x}{x^3}-\frac{2}{x^3}}{\frac{3x^3}{x^3}-\frac{4x}{x^3}+\frac{1}{x^3}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{5}{x}+\frac{3}{x^2}-\frac{2}{x^3}}{3-\frac{4}{x^2}+\frac{1}{x^3}} = \frac{0}{3-0+0} = 0$$

## Asíntota Horizontal




**Definición**: Sea $f$ una función

La recta $y = k$ es una asíntota horizontal derecha, si: $\lim_{x\to+\infty} f(x) = k$

La recta $y = k$ es una asíntota horizontal izquierda, si: $\lim_{x\to-\infty} f(x) = k$

**Ejemplo**

Halle las ecuaciones de las asíntotas horizontales (si existen) de la función $f$, definida por la regla de correspondencia:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x}{x-2} \;;\; x<2 \\ \\ \dfrac{x+1}{x-2} \;;\; x>2 \end{cases}$$

**Resolución:**

Se calcula el límite de $f(x)$ cuando $x$ tiende a menos infinito

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{2x}{x-2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{2x}{x}}{\frac{x}{x}-\frac{2}{x}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2}{1-\frac{2}{x}} = \frac{2}{1} = 2$$

Entonces se puede afirmar que $y = 2$ es una asíntota horizontal izquierda.

Se calcula el límite de $f(x)$ cuando $x$ tiende a más infinito

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x+1}{x-2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{x}{x}+\frac{1}{x}}{\frac{x}{x}-\frac{2}{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1+\frac{1}{x}}{1-\frac{2}{x}} = 1$$

Entonces podemos afirmar que $y = 1$ es una asíntota horizontal derecha.

## Límite infinito

Los valores de $f(x)$ pueden hacerse tan grandes como se quiera para todos los $x$ lo suficientemente cerca de $a$, pero distinto de $a$, es decir:

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty \qquad \lim_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty$$

**Ejemplos:**

Calcule los siguientes límites

**a.** $\lim_{x\to 2^+} \dfrac{x}{x-2}$

**Resolución:**

Al calcular el límite el numerador se aproxima a 2 mientras que el denominador resulta una cantidad muy pequeña positiva, el resultado será una cantidad muy grande.

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{x}{x-2} = \frac{2}{0^+} = +\infty$$

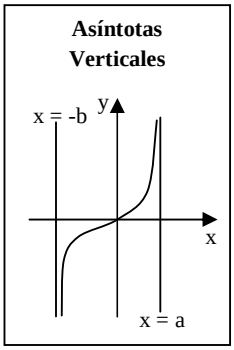
**b.** $\lim_{x\to 2^-} \dfrac{x}{x-2}$

**Resolución:**

Al calcular el límite el numerador se aproxima a dos mientras que el denominador resulta una cantidad muy pequeña negativa, el resultado será una cantidad negativa muy grande.

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{x}{x-2} = \frac{2}{0^-} = -\infty$$

## Asíntota Vertical




**Definición:** Sea $f$ una función, diremos que la ecuación $x = a$ es una asíntota vertical, si al menos uno de los siguientes límites, se cumple:

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty$$

**Ejemplo**

Determine la asíntota vertical de la siguiente función $f$ cuya regla de correspondencia es

$$f(x) = \frac{x-1}{x^2-3x+2}$$

**Resolución:**

**Primero**: Simplificando la expresión

$$f(x) = \frac{x-1}{(x-1)(x-2)} = \frac{1}{x-2}$$

**Segundo**: Al igualar el denominador a cero $x-2=0$, se obtendrá un candidato para la ecuación de la asíntota vertical es decir $x = 2$.

**Tercero**: Para determinar si $x = 2$ es una asíntota vertical se toma el límite de $f$ cuando $x$ tiende a 2 por la derecha o por la izaquierda , si el resultado es $-\infty \; o \; +\infty$ entonces se puede afirmar que $x = 2$ es asíntota vertical.

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} \frac{1}{x-2} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

**Cuarto**: Se concluye que la función $f$ tiene una asíntota vertical, la cual tendrá por ecuación $x = 2$.

**ACTIVIDAD 2**

Determine las ecuaciones de las asíntotas horizontal(es) y vertical(es) de la función $f$, cuya regla de correspondencia es

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x - 4}{x^2 - 4x - 5}$$

**Resolución:**

# UNIDAD III

# La Derivada

## Contenido

- Pendiente de una recta tangente a una curva
- Definición de Derivada
- Interpretación de la Derivada
- Reglas de Derivación
- Regla de la cadena
- Derivadas de orden superior
- Derivación implícita
- Tasas relacionadas
- Gráfica de funciones - Función creciente- Función decreciente
- Valores extremos de una función -Máximos o mínimos relativos - Valores críticos
- Criterio de la primera derivada para determinar los extremos relativos
- Criterio de la segunda derivada para determinar la concavidad de una curva
- Concavidad - Criterio de concavidad - Puntos de inflexión
- Análisis de la gráfica de una función
- Optimización de funciones
- Criterio de la segunda derivada para valores extremos
- Problemas de optimización

## Objetivos

Al final del capítulo el alumno debe:

- Conocer y manejar el concepto de derivada.
- Aplicar las reglas de derivación para calcular las derivadas de funciones reales.
- Ser capaz de utilizar la derivada para determinar la recta tangente a una curva en un punto; calcular máximos y mínimos de una función; resolver problemas de optimización.

## Introducción

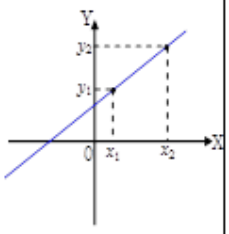
El concepto se derivada se aplica en los casos donde es necesario medir la rapidez con que se produce el cambio de una situación. Por ello es una herramienta de cálculo fundamental en los estudios de Física, Química y Biología. También en las ciencias sociales como la Economía y la Sociología se utiliza el análisis matemático para explicar la rapidez de cambio en las magnitudes que les son propias. Finalmente veremos la relación que tiene la derivada con los problemas de optimización de funciones. Estos problemas decimos que son de máximo o de mínimo (máximo rendimiento, mínimo costo, máximo benefício, mínima aceleración, mínima distancia, etc).

### Pendiente de una recta tangente a una curva

Dada una curva que es la gráfica de una función $y = f(x)$ y P un punto sobre la curva (fig. 1). La pendiente de la recta tangente a la curva en P es el límite de las pendientes de las rectas que pasan por P y otro punto Q sobre la curva ( rectas secantes), cuando Q se acerca a P.

**Pendiente de una recta**

La pendiente ($m$) de una recta que pasa por dos puntos conocidos $(x_1; y_1)$ y $(x_2; y_2)$




$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

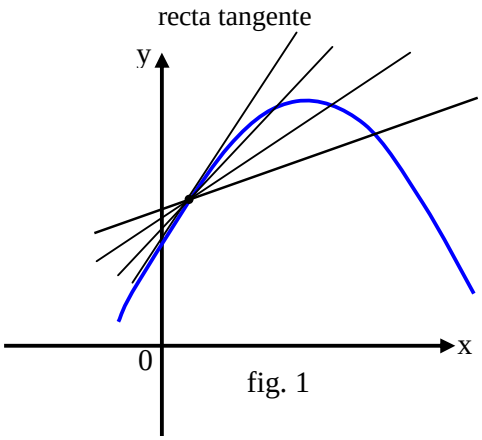



fig. 1

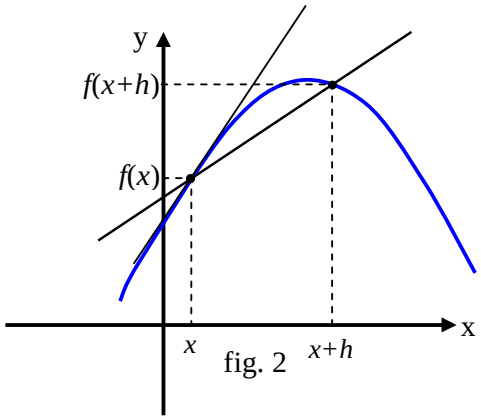



fig. 2

La pendiente de la recta secante (fig. 2) que pasa por los puntos P y Q es igual a:

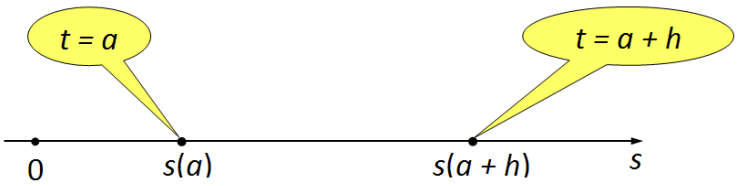
$$m = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

A medida que $h \to 0$ el punto Q se acerca a P , el valor de $h$ se hace cada vez más "pequeño", es decir la recta secante se confunde con la recta tangente a la curva en el punto P.

Por lo tanto la pendiente de la recta tangente es igual a:

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Este análisis también se emplea en otras ciencias por ejemplo en la Física se trabaja con la **velocidad instantánea** (es la velocidad que posee un partícula en un instante determinado o la velocidad que posee en un punto determinado de la trayectoria)




La velocidad instantánea de una partícula en un tiempo $t = a$ cuya ecuación de movimiento es $s = f(t)$ define por :

$$v(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

En Economía por ejemplo, el **costo marginal (CM)** es el incremento del costo total al producir una unidad adicional del bien o servicio, si la ecuación del costo total para producir $x$ artículos de cierta mercancía está dada por $y = c(x)$, el costo marginal (CM) se calculará: $$CM = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{c(x+\Delta x) - c(x)}{\Delta x}$$

Como se puede observar estas tres expresiones tienen la misma forma

$$m = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad , \quad v(t) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad , \quad CM = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{c(x+\Delta x) - c(x)}{\Delta x}$$

Este límite recibe un nombre especial dentro del Cálculo.

## Definición de Derivada

Dada una función $f$ cuya regla es $y = f(x)$, la derivada de $f$ con respecto a $x$, cuya representación es $f'(x)$ se define como:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

si el límite existe.

**Recuerde**

La derivada de una función $f$ cuya regla es $y = f(x)$ también se representa de las siguientes maneras:

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = y'$$

**Ejemplo 1:**

Calcule la derivada de la función $f$ cuya regla es $f(x) = x^2$ aplicando la definición.

**Resolución:**

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h}$$

Desarrolle el binomio al cuadrado y luego simplifique

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2xh + h^2}{h} = \lim_{h\to 0} (2x + h)$$

Evalúe para $h = 0$: $f'(x) = 2x + 0 = 2x$

Conclusión: Si $f(x) = x^2$ entonces su derivada es: $f'(x) = 2x$ .

**Recuerde**

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

**Ejemplo 2:**

Calcule $f'(4)$ aplicando la definición, sabiendo que $f(x)=\sqrt{x}$.

**Resolución:**

> **Recuerde**
>
> La conjugada de $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ es $\sqrt{a}-\sqrt{b}$
>
> La conjugada de $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ es $\sqrt{a}+\sqrt{b}$

$$f'(4)=\lim_{h\to 0}\frac{f(4+h)-f(4)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{4+h}-\sqrt{4}}{h}$$

Se racionaliza el numerador multiplicando por su conjugada, luego se simplifica

$$f'(4)=\lim_{h\to 0}\left(\frac{\sqrt{4+h}-\sqrt{4}}{h}\times\frac{\sqrt{4+h}+\sqrt{4}}{\sqrt{4+h}+\sqrt{4}}\right)=\lim_{h\to 0}\left(\frac{4+h-4}{h(\sqrt{4+h}+\sqrt{4})}\right)$$

$$f'(4)=\lim_{h\to 0}\left(\frac{h}{h(\sqrt{4+h}+\sqrt{4})}\right)=\lim_{h\to 0}\left(\frac{1}{\sqrt{4+h}+\sqrt{4}}\right)$$

Evalúe para $h = 0$

$$f'(4)=\frac{1}{\sqrt{4+0}+\sqrt{4}}=\frac{1}{2+2}=\frac{1}{4}$$

Conclusión: La derivada de $f(x)=\sqrt{x}$ para $x = 4$ es $f'(4)=\frac{1}{4}$.

## Observaciones:

1. Si existe la derivada $f'(a)$, se dice que $f$ es derivable en $a$.
2. Si no existe la derivada $f'(a)$, se dice que $f$ no es derivable en $a$.

## ACTIVIDAD 1

Calcule la derivada de la función en cada caso aplicando la definición:

a. $f(x) = x^2 + 3$

**Resolución:**

Se tiene la función: $f(x) = x^2 + 3$

Según la definición: $f'(x) =$

Como: $f(x+h) =$

Entonces: $f'(x) =$

Efectúe las operaciones correspondientes y simplifique:

Evalúe para $h = 0$

b. $f(x) = \frac{1}{x}$

**Resolución:**

**c.** $f(x) = \sqrt{x+4}$

**Resolución:**

# Interpretación de la Derivada

## Interpretación Geométrica

$f'(a)$ es la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $y = f(x)$ en el punto de abscisa $a$.

## Interpretación Física

$v(a) = s'(t)$ es la velocidad de una partícula cuya posición viene dada por $y = s(t)$ en el instante $t = a$. (velocidad instantánea).

## Interpretación General

$f'(a)$ es la razón instantánea de cambio de $y = f(x)$ con respecto a $x$ cuando $x = a$.

# Reglas de Derivación

Obtener la expresión de la función derivada de una función dada implica calcular el límite que define a esa función derivada en un punto genérico usando la expresión que define a la función original; es decir, calcular

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Pero calcular ese límite cada vez que deseemos obtener la derivada de una función resulta bastante engorroso y por ello se obtienen (aunque no las demostraremos) unas expresiones o fórmulas generales que permiten obtener fácilmente la derivada de cualquier función. Esas fórmulas o reglas de derivación son las siguientes:

## 1. Derivada de una función constante:

Una función constante es siempre derivable y su derivada es siempre 0.

$$f(x) = k \Rightarrow \frac{d}{dx}[k] = 0$$

Ejemplos:

a. $f(x) = 8 \Rightarrow f'(x) = \frac{d}{dx}[8] = 0$

b. $y = \ln 6 \Rightarrow y' = 0$

## 2. Derivada de la función identidad:

La función identidad es siempre derivable y su derivada es siempre 1.

$$f(x) = x \Rightarrow \frac{d}{dx}[x] = 1$$

## 3. Derivada de la función potencial de exponente racional

**Recuerda**

$x^{-n} = \dfrac{1}{x^n}$

$\sqrt[m]{x^n} = x^{\frac{n}{m}}$

La función potencial de exponente real $f(x) = x^n$ es siempre derivable y su derivada se determina de la siguiente manera:

$$f(x) = x^n \Rightarrow \frac{d}{dx}\left[x^n\right] = n\,x^{n-1}$$

Ejemplos: a. $f(x) = x^4 \Rightarrow f'(x) = 4x^3$

b. $y = x^{-6} \Rightarrow y' = -6x^{-7}$

c. $f(x) = \sqrt{x}$ en este caso observa que primero se debe pasar a exponente fraccionario y luego aplicar la regla de derivación.

$$f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

## 4. Derivada del factor constante

Si $f$ es una función diferenciable y $c$ es una constate, entonces $c \cdot f(x)$ es diferenciable y su derivada se determina de la siguiente manera:

$$g(x) = c\,f(x) \Rightarrow \frac{d}{dx}\left[c\,f(x)\right] = c \cdot f'(x)$$

Ejemplos: a. $f(x) = 8x^3$

$$f'(x) = 8\frac{d}{dx}\left(x^3\right) \Rightarrow f'(x) = 8(3x^2) \Rightarrow f'(x) = 24x^2$$

b. $y = \dfrac{5}{x^2}$

$$y = 5x^{-2} \Rightarrow y' = 5(-2x^{-3}) = -10x^{-3} \Rightarrow y' = -\frac{10}{x^3}$$

## 5. Derivada de la suma o diferencia de funciones

Si $f$ y $g$ son dos funciones diferenciables, entonces $f + g$ y $f - g$ son diferenciables.

$$\frac{d}{dx}\left[f(x) + g(x)\right] = f'(x) + g'(x)$$

$$\frac{d}{dx}\left[f(x) - g(x)\right] = f'(x) - g'(x)$$

Ejemplos:

a. $f(x) = 6x + x^8$

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(6x) + \frac{d}{dx}\left(x^8\right) \Rightarrow f'(x) = 6 + 8x^7$$

b. $y = \dfrac{4x^5 - x^2}{x^3}$

En este caso primero separamos para convertir la división en una resta

$$y = \frac{4x^5}{x^3} - \frac{x^2}{x^3} = 4x^2 - x^{-1}$$

Ahora se deriva aplicando las reglas estudiadas

$$y = 4x^2 - x^{-1} \Rightarrow y' = \frac{d}{dx}\left(4x^2\right) - \frac{d}{dx}\left(x^{-1}\right)$$

$$y' = (8x) - \left(-1x^{-2}\right) \Rightarrow y' = 8x + \frac{1}{x^2}$$

## 6. Derivada de un producto de funciones

Si $f$ y $g$ son dos funciones diferenciables, entonces el producto $f \cdot g$ también es diferenciable.

$$\frac{d}{dx}[f(x) \cdot g(x)] = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

$$\frac{d}{dx}[f(x) \cdot g(x)] = \begin{bmatrix} \text{Derivada de la} \\ \text{primera función} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \text{segunda} \\ \text{función} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \text{primera} \\ \text{función} \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \text{Derivada de la} \\ \text{segunda función} \end{bmatrix}$$

**Ejemplo:** $f(x) = \left(x^5 + 6\right)\left(x^2 - 3\right)$

Como se puede observar la función $f$ es igual al producto de dos funciones, entonces una manera de hallar la derivada de f es aplicando la regla del producto.

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left[x^5 + 6\right] \cdot \left(x^2 - 3\right) + \left(x^5 + 6\right) \cdot \frac{d}{dx}\left[x^2 - 3\right]$$

$$f'(x) = \left[5x^4\right] \cdot \left(x^2 - 3\right) + \left(x^5 + 6\right) \cdot [2x]$$

$$f'(x) = 5x^6 - 15x^4 + 2x^6 + 12x$$

$$f'(x) = 7x^6 - 15x^4 + 12x$$

## 7. Derivada de una división de funciones

Si $f$ y $g$ son dos funciones diferenciables y $g(x) \neq 0$, entonces la división $f / g$ también es diferenciable.

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$$

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{\begin{bmatrix} \text{Derivada del} \\ \text{numerador} \end{bmatrix} \cdot (\text{denominador}) - (\text{numerador}) \cdot \begin{bmatrix} \text{Derivada del} \\ \text{denominador} \end{bmatrix}}{(\text{denominador})^2}$$

**Ejemplo:** $f(x)=\dfrac{x^3-4}{x^2+5}$

Como se puede observar la función $f$ es igual a la división de dos funciones, entonces una manera de hallar la derivada de $f$ es aplicar la regla de la división.

$$f\,'(x)=\frac{\frac{d}{dx}\left[x^3-4\right]\cdot\left(x^2+5\right)-\left(x^3-4\right)\cdot\frac{d}{dx}\left[x^2+5\right]}{\left(x^2+5\right)^2}$$

$$f\,'(x)=\frac{\left[3x^2\right]\left(x^2+5\right)-\left(x^3-4\right)\left[2x\right]}{\left(x^2+5\right)^2}$$

$$f\,'(x)=\frac{3x^4+15x^2-2x^4+8x}{\left(x^2+5\right)^2}$$

$$f\,'(x)=\frac{x^4+15x^2+8x}{\left(x^2+5\right)^2}$$

## 8. Derivada de la función exponencial

Si $f(x)=e^x$ , entonces $f\,'(x)=e^x$

## 9. Derivada de la función logaritmo natural

Si $f(x)=\ln x$ , entonces $f\,'(x)=\dfrac{1}{x}$

## 10. Derivada de funciones trigonométricas

Si $f(x)=\operatorname{sen} x$ , entonces $f\,'(x)=\cos x$

Si $f(x)=\cos x$ , entonces $f\,'(x)=-\operatorname{sen} x$

**Ejemplos:**

Aplicando las reglas de derivación, calcule la derivada de cada una de las siguientes funciones

a. $f(x)=x^2\operatorname{sen} x$

**Resolución:**

Observe que la función $f$ es igual al producto de dos funciones, por lo tanto se aplica la regla del producto.

$$f\,'(x)=\frac{d}{dx}\left[x^2\right]\cdot\left(\operatorname{sen} x\right)+\left(x^2\right)\cdot\frac{d}{dx}\left[\operatorname{sen} x\right]$$

$$f\,'(x)=2x\cdot\left(\operatorname{sen}x\right)+\left(x^2\right)\cdot\cos x$$

$$f\,'(x)=2x\operatorname{sen}x+x^2\cos x$$

b. $g(x)=\dfrac{e^x}{\ln x}$

**Resolución:**

Observe que la función $g$ es igual a la división de dos funciones, por lo tanto se aplica la regla de la división.

$$g'(x)=\frac{\frac{d}{dx}\left[e^x\right]\cdot(\ln x)+\left(e^x\right)\cdot\frac{d}{dx}[\ln x]}{(\ln x)^2}$$

$$g'(x)=\frac{\left[e^x\right]\cdot(\ln x)+\left(e^x\right)\cdot\left[\frac{1}{x}\right]}{(\ln x)^2}$$

$$g'(x)=\frac{e^x\ln x+\frac{e^x}{x}}{(\ln x)^2}\ \Rightarrow\ g'(x)=\frac{x\,e^x\ln x+e^x}{x\cdot(\ln x)^2}$$

c. $h(x)=e^x\cdot\cos x$

**Resolución:**

Observe que la función $h$ es igual al producto de dos funciones, por lo tanto se aplica la regla del producto.

$$h'(x)=\frac{d}{dx}\left[e^x\right]\cdot(\cos x)+\left(e^x\right)\cdot\frac{d}{dx}[\cos x]$$

$$h'(x)=\left[e^x\right]\cdot(\cos x)+\left(e^x\right)\cdot[-\operatorname{sen} x]$$

$$h'(x)=e^x\cos x-e^x sen x\quad\Rightarrow\quad h'(x)=e^x(\cos x-\operatorname{sen} x)$$

d. $f(x)=(2x+5)^2$

**Resolución:**

Observe que tiene un binomio al cuadrado, entonces lo primero que se debe hacer es desarrollar el binomio

$$f(x)=(2x+5)^2=4x^2+20x+25$$

Luego se aplica las reglas de derivación

$$f'(x)=4\frac{d}{dx}\left(x^2\right)+20\frac{d}{dx}(x)+\frac{d}{dx}(25)$$

$$f'(x)=4(2x)+20(1)+(0)$$

$$f'(x)=8x+20$$

## ACTIVIDAD 2

Complete la siguiente tabla de derivadas

| | | |
|---|---|---|
| Función constante | $f(x) = k$ | |
| Función identidad | $f(x) = x$ | |
| Función potencial de exponente racional | $f(x) = x^n$ | |
| Factor constante | $f(x) = k\,x$ | |
| Derivada de la suma o diferencia de funciones | $f(x) + g(x)$ | |
| Derivada de un producto de funciones | $f(x) \cdot g(x)$ | |
| Derivada de una división de funciones | $\frac{f(x)}{g(x)}$ | |
| Derivada de la función exponencial | $f(x) = e^x$ | |
| Función logaritmo natural | $f(x) = ln(x)$ | |
| Función seno | $f(x) = sen(x)$ | |
| Función coseno | $f(x) = cos(x)$ | |

## ACTIVIDAD 3

Aplicando las reglas de derivación calcule la derivada en cada caso:

a. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5x - 8$

**Resolución:**

b. $g(x) = x^2 sen\, x + 2x \cos x$

**Resolución:**

c. $h(x) = x(\ln x - 1)$

**Resolución:**

d. $j(x) = \dfrac{e^x}{x+1}$

**Resolución:**

## Regla de la cadena

Dadas las funciones derivables $y = g(u)$ y $u = h(x)$, la derivada de $y$ respecto de $x$ se determina aplicando la siguiente expresión:

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \left(\frac{dy}{du}\right)\left(\frac{du}{dx}\right)}$$

A este procedimiento se le conoce como regla de la cadena.

**Ejemplos:**

a. Si $f(x) = \left(x^3 + 7\right)^{10}$, calcule $f'(x)$.

**Resolución:**

Observa que $f$ se puede expresar de la siguiente manera

$$f(x) = \left(x^3 + 7\right)^{10} \rightarrow f(u) = (u)^{10} \ , \ u = x^3 + 7$$

Entonces para determinar $f'(x)$ aplicamos la regla de la cadena

$$\frac{d}{dx} f(x) = \left(\frac{df}{du}\right)\left(\frac{du}{dx}\right) \rightarrow f'(x) = \frac{d}{du}\left[u^{10}\right] \cdot \frac{d}{dx}\left[x^3 + 7\right]$$

$$f'(x) = \left[10u^9\right] \cdot \left[3x^2\right]$$

Finalmente reemplazamos $u = x^3 + 7$ y se simplifica

$$f'(x) = 30\left(x^3 + 7\right)^9 x^2$$

b. Si $g(x) = e^{\text{sen } x}$, calcule $g'(x)$.

**Resolución:**

Observa que $g$ se puede expresar de la siguiente manera:

$$g(x) = e^{\text{sen } x} \rightarrow g(u) = (e)^u \ , \ u = \text{sen } x$$

Entonces para determinar $g'(x)$ aplicamos la regla de la cadena

$$\frac{d}{dx} g(x) = \left(\frac{dg}{du}\right)\left(\frac{du}{dx}\right) \rightarrow g'(x) = \frac{d}{du}\left[e^u\right] \cdot \frac{d}{dx}\left[\text{sen } x\right]$$

$$g'(x) = \left[e^u\right] \cdot \left[\cos x\right]$$

Finalmente reemplazamos $u = sen\, x$ y simplificamos

$$g'(x) = e^{\text{sen } x} \cos x$$

c. Si $h(x) = \ln\left(x^4 + 1\right)$, calcule $h'(x)$.

**Resolución:**

Observa que $h$ se puede expresar de la siguiente manera

$$h(x) = \ln\left(x^4 + 1\right) \rightarrow h(u) = \ln(u) \ , \ u = x^4 + 1$$

Entonces para determinar $h'(x)$ aplicamos la regla de la cadena

$$h'(x) = \left(\frac{d\,g}{d\,u}\right)\left(\frac{d\,u}{dx}\right) \rightarrow h'(x) = \frac{d}{du}[\ln u]\cdot\frac{d}{dx}\left[x^4+1\right]$$

$$h'(x) = \frac{1}{u}\cdot\left[4x^3\right]$$

Finalmente reemplazamos $u = x^4+1$ y simplificamos

$$h'(x) = \frac{4x^3}{x^4+1}$$

## ACTIVIDAD 4

Aplicando la regla de la cadena, obtenga la primera derivada de las siguientes funciones

| | |
|---|---|
| $f(x) = (g(x))^n$ | |
| $f(x) = e^{g(x)}$ | |
| $f(x) = \ln(g(x))$ | |
| $f(x) = \text{sen}^n(g(x))$ | |
| $f(x) = \cos^n(g(x))$ | |

## ACTIVIDAD 5

Aplicando la regla de la cadena, obtenga la primera derivada de las siguientes funciones

a. $f(x) = \left(x^4 + 9\right)^5$

**Resolución:**

b. $g(x) = \text{sen}\left(x^3\right)$

**Resolución:**

c. $h(x) = e^{x^2+3}$

**Resolución:**

d. $f(x) = \ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)$

**Resolución:**

## Derivadas de orden superior

Sea $f$ una función diferenciable, entonces se denota como $f'$ a la primera derivada de $f$; puede suceder que esta nueva función sea a su vez derivable, en este caso a la derivada de la primera derivada se le denomina segunda derivada de la función $f$. Del mismo modo, la derivada de la segunda derivada se llama tercera derivada de $f$, y así sucesivamente hasta la enésima derivada.

Dada una función $y = f(x)$ para representar sus derivadas se emplean las siguientes notaciones:

Primera derivada: $f'(x) = \dfrac{d}{dx} f(x) = y'$

Segunda derivada: $f''(x) = \dfrac{d^2}{dx^2} f(x) = y''$

Tercera derivada: $f'''(x) = \dfrac{d^3}{dx^3} f(x) = y'''$

Enésima derivada: $f^n(x) = \dfrac{d^n}{dx^n} f(x) = y^n$

**Ejemplos:**

a. Si $f(x) = x^{10}$ entonces $f'(x) = 10x^9$

$f''(x) = 10(9x^8) \rightarrow f''(x) = 90x^8$

$f'''(x) = 90(8x^7) \rightarrow f'''(x) = 720x^7$

b. Si $g(x) = x \ln x$ en este caso como se puede observar se tiene un producto

Por lo tanto se aplica la regla de la derivada de un producto

$$g'(x) = \frac{d}{dx}[x] \cdot \ln x + x \cdot \frac{d}{dx}[\ln x] \rightarrow g'(x) = [1] \cdot \ln x + x \cdot \left[\frac{1}{x}\right]$$

Simplificando se obtiene: $g'(x) = \ln x + 1$

Para obtener la segunda derivada se deriva a $g'(x)$

$$g''(x) = \frac{d}{dx}[\ln x] + \frac{d}{dx}[1] \rightarrow g''(x) = \frac{1}{x} + 0$$

Finalmente: $g''(x) = \dfrac{1}{x}$

## ACTIVIDAD 6

Obtenga la segunda derivada de las siguientes funciones

a. $f(x) = x^3 + 3x^2 - 4x + 7$

**Resolución:**

b. $g(x) = 4sen(3x) - 9\,cos(2x)$

**Resolución:**

c. $h(x) = e^{x^2}$

**Resolución:**

## Derivación implícita

La mayoría de las funciones están expresadas en forma explícita esto significa que dada una función $y = f(x)$ la variable dependiente $y$ esta expresada en términos de $x$.

Por ejemplo: $y = x^2 + 1;\ y = \text{sen}(2x); y = e^{x^2}$

En estos casos para hallar $y'$ aplicamos directamente las reglas de derivación.

Pero hay casos donde despejar $y$ en términos de $x$ es muy difícil y hasta a veces imposible, Por ejemplo: $x^3 - y^3 = xy + 8$; $\text{sen}(x - y) = y^2$; $e^{x+y} = x^2 y^3 - 7$ precisamente en estos casos para hallar $y'$ se aplica la derivación implícita.

Para derivar en forma implícita es recomendable tener en cuenta lo siguiente:

a. Cuando se derivan términos que solo contienen a *x*, la derivación será la habitual. Sin embargo, cuando se tiene que derivar un término donde aparezca la *y*, será necesario aplicar la regla de la cadena.

**Ejemplo 1:** $\frac{d}{dx}\left(x^5\right) = 5x^4$

**Ejemplo 2:** $\frac{d}{dx}\left(y^7\right) = 7y^6 \cdot \frac{dy}{dx} = 7y^6 y'$

**Ejemplo 3:** $\frac{d}{dx}\left(x^5 y^7\right)$ observe que en este caso se tiene un producto por lo tanto se aplica la regla de la "derivada de un producto".

$$\frac{d}{dx}\left(x^5 y^7\right) = \underbrace{\frac{d}{dx}\left[x^5\right]} \cdot y^7 + x^5 \cdot \underbrace{\frac{d}{dx}\left[y^7\right]}$$

$$\frac{d}{dx}\left(x^5 y^7\right) = 5x^4 y^7 + 7x^5 y^6$$

b. Dada una ecuación de la forma $H(x; y) = 0$

- Suponga que la ecuación define (localmente), a *y* como función de *x* y que esta función es derivable.
- Derive con respecto a *x* ambos miembros de la ecuación, considerando como en los casos anteriores que *y* es función de *x*.
- Despeje $y'$ en términos de *x* e *y*.

**Ejemplo:** $6xy^5 - y^4 = 8x + 3y$

Para calcular $\frac{dy}{dx}$, seguimos los pasos indicados:

Se deriva respecto a x ambos miembros de la igualdad

$$\frac{d}{dx}\left(6xy^5 - y^4\right) = \frac{d}{dx}(8x + 3y)$$

Se aplican las reglas de derivación

$$6\frac{d}{dx}[xy^5] - \frac{d}{dx}[y^4] = 8\frac{d}{dx}[x] + 3\frac{d}{dx}[y]$$

$$6\left(\frac{d}{dx}[x]\cdot y^5 + x\cdot\frac{d}{dx}[y^5]\right) - 4y^3\frac{d}{dx}[y] = 8(1) + 3\frac{d}{dx}[y]$$

$$6\left((1)\cdot y^5 + x\cdot 5y^4\frac{d}{dx}[y]\right) - 4y^3\cdot y' = 8 + 3y'$$

$$6y^5 + 30xy^4y' - 4y^3y' = 8 + 3y'$$

Se agrupan los términos que tienen $y'$

$$30xy^4y' - 4y^3y' - 3y' = 8 - 6y^5$$

Se factoriza $y'$

$$y'\left(30xy^4 - 4y^3 - 3\right) = 8 - 6y^5$$

Finalmente se despeja $y'$

$$y' = \frac{8 - 6y^5}{30xy^4 - 4y^3 - 3}$$

## ACTIVIDAD 7

a. Calcule $\frac{dy}{dx}$ en la ecuación $x^2 + y^2 = 9$

**Resolución:**

b. Calcule $\frac{dy}{dx}$ en la ecuación $y = e^x + e^y$

**Resolución:**

c. Halle la ecuación de la recta tangente a la curva definida por $2x^3 + 3y^3 = 5xy$ en el punto $(1;1)$.

**Resolución:**

# Aplicaciones de la derivada

## Cálculo de formas indeterminadas 0 / 0 ; ± ∞ /± ∞

**Teorema (Regla de L'Hospital)**

Sean f y g funciones derivables, $g'(x) \neq 0$ cerca de $a$ y $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ tiene la forma indeterminada $\frac{0}{0}$ o $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$, entonces $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ .

**Observación:** La regla de L'Hospital también es válida para los límites laterales

**Ejemplo :**

Calcule: $\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1}{sen(x)}$

**Resolución:**

Evaluando se obtiene: $\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1}{sen(x)} = \frac{e^{0^2}-1}{sen(0)} = \frac{1-1}{0} = \frac{0}{0}$

Como es de la forma $\frac{0}{0}$, se aplica la regla de L'Hospital

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1}{sen(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{2xe^{x^2}}{\cos(x)}$$

Evaluando se obtiene: $\lim_{x\to 0}\frac{2xe^{x^2}}{\cos(x)} = \frac{2.0.e^{0^2}}{\cos(0)} = \frac{0}{1} = 0$

Por lo tanto: $\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1}{sen(x)} = 0$

**Ejemplo:**

Calcule: $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{4x}}{x^2}$

**Resolución:**

Evaluando se obtiene: $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{4x}}{x^2} = \frac{+\infty}{+\infty}$

Como es de la forma $\frac{+\infty}{+\infty}$, se aplica la regla de L'Hospital

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{4x}}{x^2} = \lim_{x\to+\infty}\frac{4e^{4x}}{2x}$$

Evaluando se obtiene: $\lim_{x\to+\infty}\frac{4e^{4x}}{2x} = \frac{4e^{4(+\infty)}}{2(+\infty)} = \frac{2(+\infty)}{(+\infty)} = \frac{+\infty}{+\infty}$

Como es de la forma $\frac{+\infty}{+\infty}$, se aplica la regla de L'Hospital

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{4e^{4x}}{2x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2e^{4x}}{x}=8\lim_{x\to+\infty}e^{4x}=8e^{4(+\infty)}=+\infty$$

Por lo tanto: $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{4x}}{x^2}=+\infty$

## ACTIVIDAD 8

Calcule los siguientes límites:

a) $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^{x} - e^{-x}}{\operatorname{sen}(x)}$

b) $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{x}{\ln x + 2x}$

c) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} 3x}{x - \dfrac{3}{2}\operatorname{sen} 2x}$

d) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\ln(x+1)-\operatorname{sen} x}{x \operatorname{sen} x}$

e) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{x+27}-3}{\sqrt[4]{x+16}-2}$

## Velocidad y aceleración

La velocidad es la derivada de la posición de un móvil con respecto al tiempo.

Es decir si $s(t)$ es una función que da la posición de un móvil en función del tiempo, entonces la velocidad $v(t) = s'(t)$.

La aceleración es la tasa de cambio de la velocidad de un móvil con respecto al tiempo.

Es decir si $v(t)$ es una función que da la velocidad de un móvil en función del tiempo, entonces la aceleración $a(t) = v'(t) = s''(t)$.

### Ejemplo:

Calcule la velocidad y aceleración de un móvil cuya posición está descrita por la ecuación $s(t) = 5t^2 + 12t + 3$, si *t* está dada en segundos y *s* en metros.

**Resolución:**

En este caso, $s(t) = 5t^2 + 12t + 3 \Rightarrow v(t) = s'(t) = 10t + 12$

En este caso, $v(t) = 10t + 12 \Rightarrow a(t) = v'(t) = 10$

Significa que la aceleración es constante: 10 m/s$^2$.

## ACTIVIDAD 9

Si el movimiento de un objeto lo describimos por la ecuación $s(t) = t^3 - t^2$ , si $t$ está dada en segundos y $s$ en metros. Determine la posición del móvil, la velocidad y la aceleración en 6 segundos.

**Resolución:**

# Tasas relacionadas

Una de las aplicaciones de la regla de la cadena y de la derivación implícita es el cálculo de la rapidez con la que cambia una variable con respecto a otra variable, siempre que dichas variables estén relacionadas mediante una expresión matemática.

Por ejemplo, suponga que se tiene un tanque cónico para almacenar agua, si se le vierte agua cada minuto, el volumen del agua dentro del tanque, la profundidad del agua en éste y el radio de la superficie del agua variarán. ¿Cómo determinar la velocidad con la que cambian estas magnitudes?

Sabemos que las tres magnitudes nombradas están relacionadas matemáticamente a través de la fórmula del volumen de un cono y además las tres son funciones del tiempo entonces mediante una derivación implícita se pude determinar la razón de cambio de una magnitud conociendo la razón de cambio de las demás.

Estrategias para la resolución de problemas de tasas relacionadas

- Identifique todas las cantidades dadas y por determinar. Haga un esbozo del gráfico.
- Escriba una ecuación que incluya las variables cuyos ritmos de cambio se encuentran en la información dada o deben calcularse.
- Derive ambos lados de la ecuación aplicando la regla de la cadena o la derivación implícita con respecto al tiempo *t*.
- Finalmente sustituya en la ecuación resultante todos los valores conocidos de las variables y sus ritmos de cambio. Luego despeje el ritmo de cambio requerido.

**Ejemplo 1:**

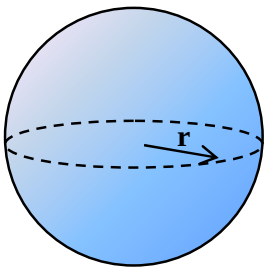
Se bombea aire en el interior de un globo esférico a razón de 4,5 $m^3$/minuto. Calcule el ritmo de cambio del radio del globo cuando el radio es de 2 m.

**Recuerda**
El volumen de una esfera está dado por:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

**Resolución:**

(1) Lo primero que se debe hacer es un dibujo para representar el texto, incluyendo de ser posible todas las variables que vas a necesitar durante el proceso.




(2) Observe que en este caso las variables son el volumen, el radio de la esfera y una tercera variable que es el tiempo.

$V$ = volumen de la esfera

$r$ = radio de la esfera

$t$ = tiempo

(3) Iniciando la interpretación del texto

"Se bombea aire en el interior de un globo esférico a razón de 4,5 $m^3$/minuto" esto significa que la variación del volumen respecto del tiempo es de 4,5 $m^3$/minuto y se expresa de la siguiente manera: $\frac{dV}{dt} = 4{,}5$

"Calcule el ritmo de cambio del radio del globo" significa que se debe calcular la variación del radio respecto del tiempo y se representa de la siguiente manera: $\frac{d\,r}{dt} = ?$

"cuando el radio es de 2 m" significa que el valor de $r$ es 2., se representa así: $r = 2$

(4) Se determina una fórmula que relacione las variables: $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

(5) Derive implícitamente respecto al tiempo

$$\frac{d\,V}{dt} = \frac{4}{3}\pi \frac{d}{dt}\left(r^3\right) \quad \Rightarrow \frac{d\,V}{dt} = \frac{4}{3}\pi\left(3r^2\,\frac{d\,r}{dt}\right) \quad \Rightarrow \frac{d\,V}{dt} = 4\pi r^2\,\frac{d\,r}{dt}$$

(6) Reemplace los valores obtenidos en el paso (3): $4{,}5 = 4\pi(2)^2\,\frac{d\,r}{dt}$

(7) Efectúe las operaciones correspondientes y despeje $\frac{d\,r}{dt}$

$$\frac{d\,r}{dt} = 0{,}089$$

**Respuesta:** Cuando el radio es de 2 m, la rapidez con la que varía el radio respecto al tiempo es de $0{,}089$ m/minuto.

**Ejemplo 2:**

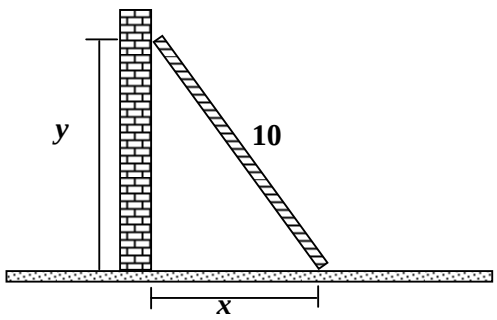
Una escalera de mano de 10 m de largo está apoyada inclinada contra una pared. Si la parte inferior de la escalera resbala sobre el suelo, alejándose del muro, a una velocidad de 5 m/s ¿a qué velocidad está bajando por el muro el otro extremo de la escalera en el momento en que está a una altura de 8 metros del suelo?

**Resolución:**

Primero se hace un dibujo para representar el texto, incluyendo las variables que vas a necesitar durante el proceso.

$t$ = tiempo transcurrido desde que inicia el movimiento.

$y$ = distancia de la parte superior de la escalera respecto al piso a los $t$ segundos (observa que este valor es variable).

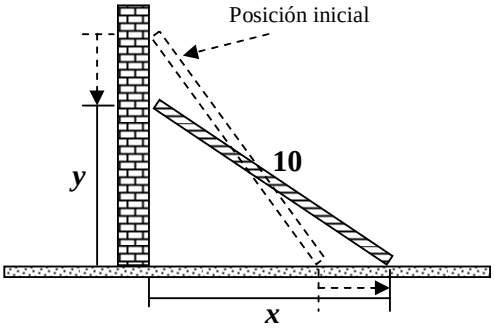


$x$ = distancia de la parte inferior de la escalera respecto al muro a los $t$ segundos (observa que este valor es variable).

Interpretación del texto

"…la parte inferior de la escalera resbala sobre el suelo, alejándose del muro, a una velocidad de 5 m/s…"

Significa que $\frac{dx}{dt} = 5$




"…a qué velocidad está bajando por el muro el otro extremo de la escalera…"

Significa que se debe calcular: $\frac{dy}{dt} = ?$

"…en el momento en que está a una altura de 8 metros del suelo"

Significa que se debe calcular $\frac{dy}{dt}$ cuando $y = 8$.

Ahora determine una fórmula que relacione las variables.

Observe del gráfico que se forma un triángulo rectángulo con las variables y por lo tanto se aplica el teorema de Pitágoras.

$$x^2 + y^2 = 10^2$$

Se deriva implícitamente: $\underbrace{\frac{d}{dt}\left(x^2\right)}_{2x\frac{dx}{dt}} + \underbrace{\frac{d}{dt}\left(y^2\right)}_{2y\frac{dy}{dt}} = \underbrace{\frac{d}{dt}\left(10^2\right)}_{0}$

Aún falta calcular el valor de $x$ cuando $y = 8$, aplicando nuevamente el teorema de Pitágoras:

$x^2 + y^2 = 10^2 \Rightarrow \; x^2 + 8^2 = 100$ resolviendo se tiene que $x = 6$.

Se reemplazan todos los datos (sólo debe quedar sin reemplazar la pregunta del problema)

$$2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad 2(6)(5) + 2(8)\frac{dy}{dt} = 0$$

Despejando se obtiene: $\frac{dy}{dt} = -3{,}75$ (el signo negativo indica que está descendiendo)

**Respuesta:** El extremo superior de la escalera está bajando con una velocidad de 3,75 m/s en el momento que su distancia al piso es de 8 m.

## ACTIVIDAD 10

a. Las aristas de un cubo variable aumentan a razón de 3 cm por segundo. ¿Con qué rapidez aumenta el volumen del cubo cuando la arista mide 10 cm?

**Resolución:**

b. Se suelta un globo desde un punto alejado 120 pies de un observador, ambos se encuentran en el nivel del piso. Si el globo se eleva en línea recta hacia arriba a una velocidad de 10 pies por segundo, ¿ qué tan rápido está aumentando la distancia del observador al globo cuando éste se encuentra a 90 pies de altura?

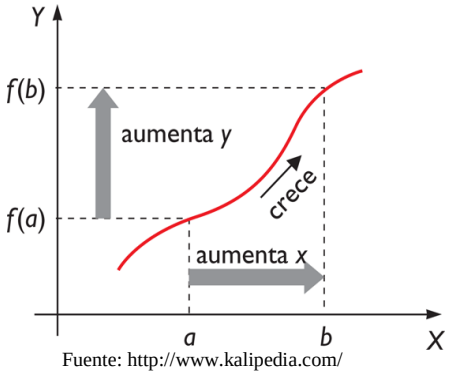
**Resolución:**

# Gráfica de funciones

## Función creciente

Una función es creciente cuando al aumentar o disminuir el valor de la variable independiente, (x), el valor de la variable dependiente, (y), también aumenta o disminuye respectivamente.

Una función $f$ es creciente en un intervalo $I$, si para todo $x_1 < x_2$ en el intervalo $I$, entonces $f(x_1) < f(x_2)$

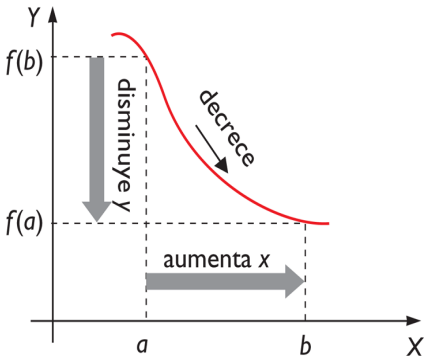



Fuente: http://www.kalipedia.com/

## Función decreciente

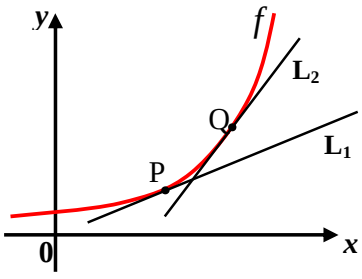
Una función es decreciente cuando al aumentar el valor de la variable independiente, (x), el valor de la variable dependiente, (y), disminuye o viceversa.

Una función $f$ es decreciente en un intervalo $I$, si para todo $x_1 < x_2$ en el intervalo $I$, entonces $f(x_1) > f(x_2)$

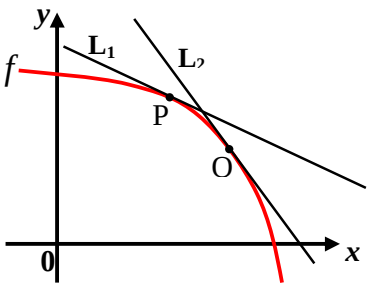



Fuente: http://www.kalipedia.com/

Observa los siguientes gráficos:




En este caso la función $f$ es creciente y las rectas tangentes en cualquier punto del dominio de $f$ tienen pendiente positiva.




En este caso la función $f$ es decreciente y las rectas tangentes en cualquier punto del dominio de $f$ tienen pendiente negativa.

**Conclusión:**

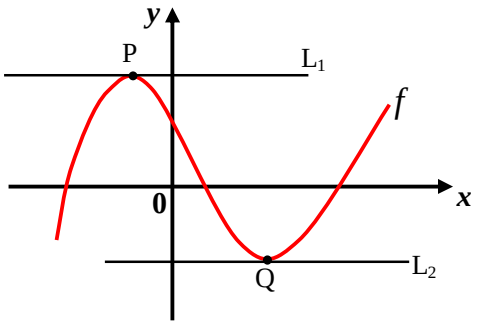
Si la derivada es negativa en todo un intervalo indica que la gráfica de la función es decreciente en ese intervalo mientras que una derivada positiva indica que la gráfica es creciente.

| |
|---|
| Si $f'(x) > 0$, para todo $x$ en algún intervalo $]a; b[$, entonces $f$ es creciente en $]a; b[$. |
| Si $f'(x) < 0$, para todo $x$ en algún intervalo $]a; b[$, entonces $f$ es decreciente en $]a; b[$. |

Si la derivada es nula en un punto, significa que en dicho punto la recta tangente tiene pendiente cero, o sea, la recta tangente es horizontal. En los puntos P y Q

$$f'(x) = 0$$

Los puntos que tienen tangente horizontal tienen especial relevancia, pues entre ellos se encuentran los máximos y mínimos de la función.

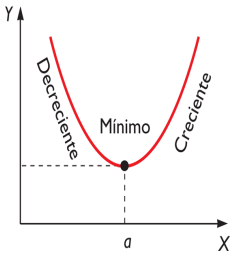


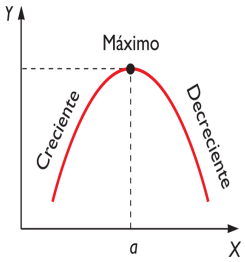

## Valores extremos de una función

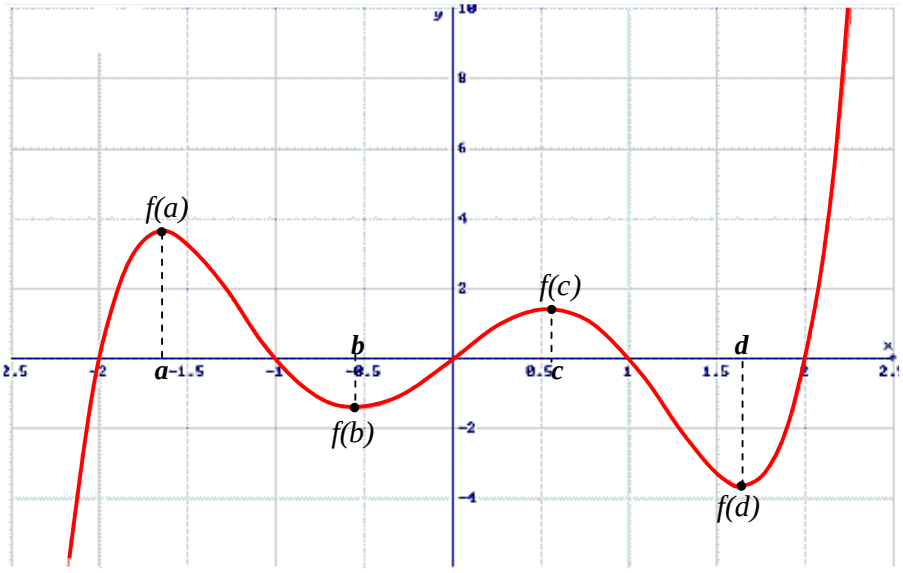
### Máximos o mínimos relativos

$f(c)$ es un máximo relativo de f si $f(c) \geq f(x)$ para toda $x$ en algún intervalo abierto que contenga a *c*.

$f(c)$ es un mínimo relativo de f si $f(c) \leq f(x)$ para toda $x$ en algún intervalo abierto que contenga a *c*.




Observe en la figura $f(a) \geq f(x)$ para todo $x \in ]-2;-1[$ y $f(c) \geq f(x)$ para todo $x \in ]0; 1[$ entonces se puede afirmar que la función $f$ tiene dos máximos relativos que son $f(a)$ y $f(c)$.

Observe en la figura $f(b) \le f(x)$ para todo $x \in ]-1;0[$ y $f(d) \le f(x)$ para todo $x \in ]1;2[$ entonces se puede afirmar que la función $f$ tiene dos mínimos relativos que son $f(b)$ y $f(d)$.

## Valores críticos

Un valor crítico de una función $f(x)$ es un número c en su dominio para el cual $f'(c) = 0$ ó $f'(c)$ no está definida.

**Ejemplo:**

Dada la función $f(x) = x^3 - 12x + 1$, halle los valores críticos de *f*.

**Resolución:**

Para determinar los valores críticos de $f$ se halla primero $f'(x)$

$$f(x) = x^3 - 12x + 1 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 3x^2 - 12$$

Luego se debe igualar a cero la primera derivada: $f'(x) = 0$

$3x^2 - 12 = 0$ resolviendo esta ecuación se obtiene $x = -2 \vee x = 2$

Finalmente, los valores críticos de $f$ son -2 y 2.

## Criterio de la primera derivada para determinar los extremos relativos

**Máximo de una Función.**

$f' > 0$ $f' < 0$

crece **c** decrece

$f'(c) = 0$

$f(c)$ es máximo relativo

Sea ***c*** un valor crítico de $f(x)$.

Si $f'(x) > 0$ a la izquierda de *c* y $f'(x) < 0$ a la derecha de *c*, entonces $f$ tiene un máximo relativo en *c*. (ver figura 1)

Si $f'(x) < 0$ a la izquierda de *c* y $f'(x) > 0$ a la derecha de *c*, entonces $f$ tiene un mínimo relativo en c. (ver figura 2)

**Mínimo de una Función.**

$f' < 0$ $f' > 0$

decrece **c** crece

$f'(c) = 0$

$f(c)$ es mínimo relativo

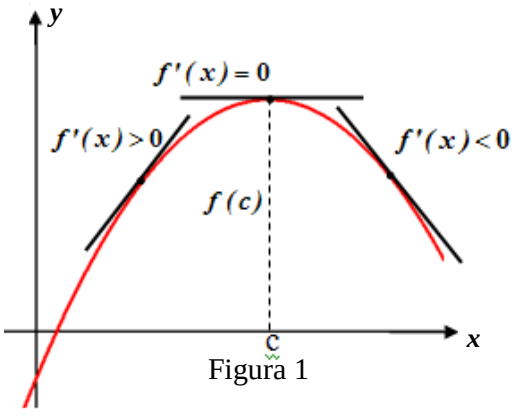


Figura 1

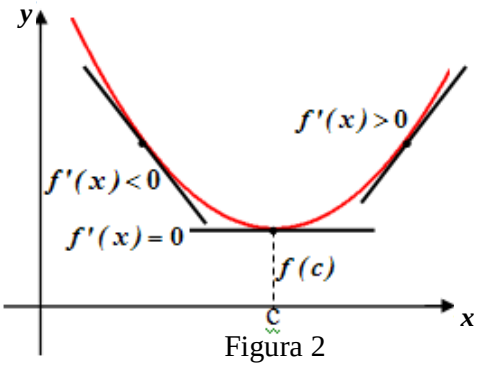
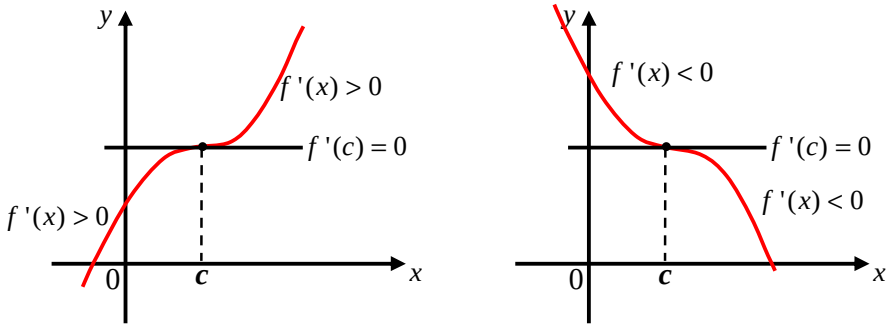


Figura 2

Se puede observar de las figuras anteriores que si una función es continua y derivable en un valor *c* tal que $f(c)$ es un extremo relativo (máximo o mínimo) entonces: $f'(c) = 0$.

Es muy importante saber que lo contrario no es cierto, es decir, si $f'(c)=0$ no necesariamente $f(c)$ es un extremo relativo, observe la siguientes figuras,



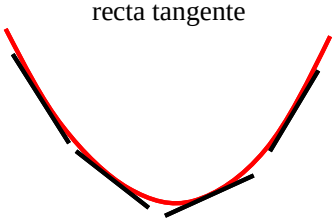

## Criterio de la segunda derivada para determinar la concavidad de una curva

### Concavidad

La concavidad de la gráfica de una función $f$ se refiere hacia donde se curva la gráfica de *f*, hacia arriba o hacia abajo.

**GRÁFICO CÓNCAVO HACIA ARRIBA**

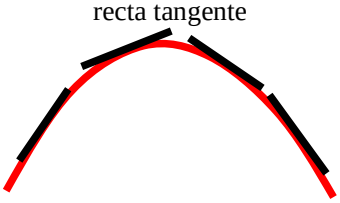
El gráfico está encima de cada recta tangente



Las pendientes de las rectas tangentes aumentan

**GRÁFICO CÓNCAVO HACIA ABAJO**

El gráfico está debajo de cada recta tangente



Las pendientes de las rectas tangentes disminuyen

**Concavidad**

En los intervalos donde $f'$ sea creciente, $f(x)$ será cóncava hacia arriba.

En los intervalos donde $f'$ sea decreciente, $f(x)$ será cóncava hacia abajo.

Analizando los gráficos anteriores se puede deducir que dada una función $f$:

Si la primera derivada $f'(x)$ es creciente, entonces $f''(x)$ es positiva.

Si la primera derivada $f'(x)$ es decreciente, entonces $f''(x)$ es negativa.

### Criterio de concavidad

Si $f''(x)>0$ en ]a; b[, entonces $f$ es cóncava hacia arriba en ]a; b[.

Si $f''(x)<0$ en ]a; b[, entonces $f$ es cóncava hacia abajo en ]a; b[.

Por ejemplo, dada la función $f(x)=x^2-3x$ para determinar la concavidad de su gráfica se halla la segunda derivada y luego se analiza en que intervalos es positiva o negativa.

Dada la función $f(x) = x^2 - 3x$

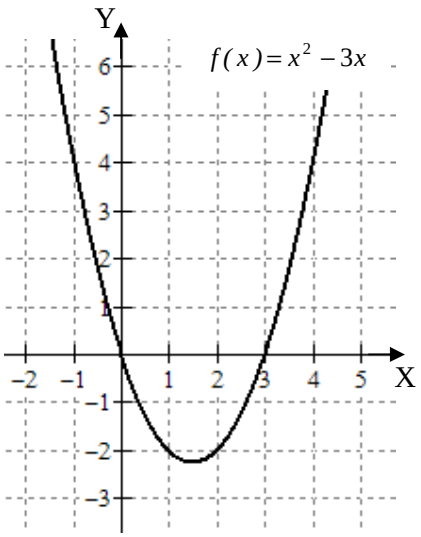
Primera derivada: $f'(x) = 2x - 3$

Segunda derivada: $f''(x) = 2$

Como se puede observar

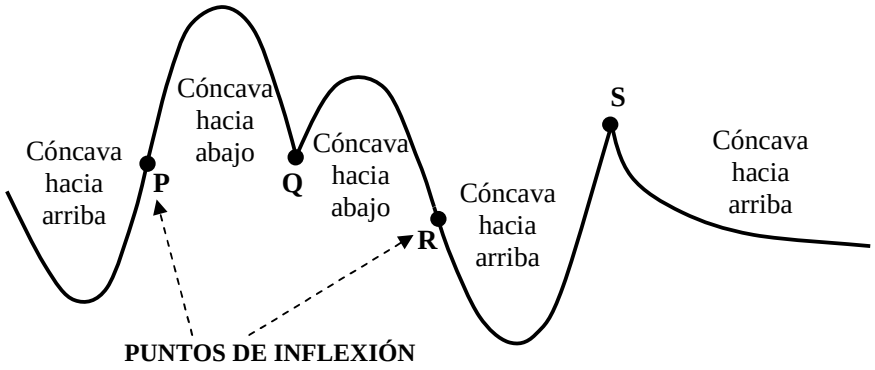
$f''(x) > 0$ para todo valor de $x$, por lo tanto la gráfica de la función $f$ es cóncava hacia arriba.

Cabe resaltar que para este ejemplo $f$ es una función cuadrática y por lo tanto se pudo determinar su concavidad aplicando otros criterios más simples, sin embargo se ha empleado el criterio de la segunda derivada con fines didácticos.




## Puntos de inflexión

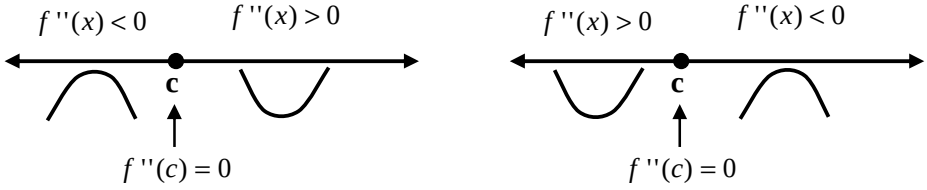
Un punto P en una curva $y = f(x)$ se llama **punto de inflexión** si $f$ es continua en dicho punto y la curva cambia de cóncava hacia a cóncava hacia abajo o de cóncava hacia abajo a cóncava hacia arriba en P.




En la figura se puede observar que los puntos P y R hay cambio de concavidad por lo tanto se les denomina "puntos de inflexión". En los puntos Q y S no hay cambio de concavidad por lo tanto no son puntos de inflexión.

Para determinar algebraicamente los puntos de inflexión se puede seguir los siguientes pasos:

- Halle $f''(x)$ (segunda derivada de la función $f$)
- Se iguala a cero la segunda derivada y se resuelve la ecuación: $f''(x) = 0$
- A las raices reales de esta ecuación se le llama valores críticos de segundo orden
- Se analiza el signo de $f''(x)$ antes y después de cada valor crítico
- Si $f''(x)$ cambia de signo entonces el valor crítico determina un punto de inflexión.



**Ejemplo:**

Dada la función $f(x) = x^3 - 12x + 1$

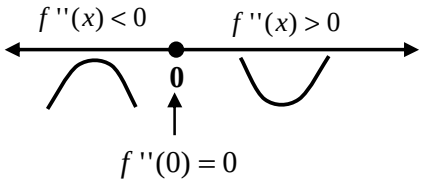
Primera derivada: $f'(x) = 3x^2 - 12$ Segunda derivada: $f''(x) = 6x$

Iguala a cero la segunda derivada y resuelve la ecuación:

$f''(x) = 0 \quad \Rightarrow 6x = 0$ resolviendo se obtiene $x = 0$ este es un valor crítico

Analiza el signo de $f''(x)$ antes y después de 0.

Observa que cuando $x < 0$ la gráfica de $f$ es cóncava hacia abajo y cuando $x > 0$ la gráfica de $f$ es cóncava hacia arriba, dado que hay cambio de concavidad se puede afirmar que para $x = 0$ hay punto de inflexión.




El punto de inflexión se obtiene reeplazando $x = 0$ en la función.

$f(x) = x^3 - 12x + 1 \Rightarrow f(0) = 0^3 - 12(0) + 1 = 1$

El punto de inflexión es: (0;1)

## Análisis de la gráfica de una función

Toda función se puede representar gráficamente, una manera es tabulando, es decir, asignando valores a las variables y obteniendo algunos puntos de la función para luego ubicarlos en el plano cartesiano y finalmente al unir intuitivamente los puntos se obtiene una curva que es la gráfica de la función. Este método implica mucho tiempo dado que se necesitarían varios puntos y no es muy preciso.

Otra forma de obtener la gráfica de una función es aplicando todos los conceptos estudiados anteriormente (dominio, crecimiento, decrecimiento, valores extremos, concavidad,…), poniendo un poco de orden en estos conocimientos para sistematizar la representación de la curva, podemos elaborar el siguiente esquema a seguir:

1) Dominio
2) Puntos de corte con los ejes:
   a) Con el eje X: ***y = 0***
   b) Con el eje Y: ***x = 0***
3) Asíntotas:
   a) Horizontales
   b) Verticales
4) Monotonía:
   a) Intervalos de crecimiento..... $\boldsymbol{f' > 0}$
   b) Intervalos de decrecimiento..... $\boldsymbol{f' < 0}$
   c) Puntos críticos (máximos y mínimos)..... $\boldsymbol{f' = 0}$

5) Curvatura:

a) Intervalos de concavidad..... $f'' < 0$

b) Intervalos de convexidad..... $f'' > 0$

c) Puntos de inflexión..... $f'' = 0$

Por ejemplo analicemos la siguiente función: $f(x) = x^3 - 3x + 2$

**Dominio:** Dado que es una función polinómica, *x* puede tomar cualquier valor real, por lo tanto el dominio es R.

**Asíntotas:** Las funciones polinómicas no tienen asíntotas

**Puntos de corte o interceptos con los ejes coordenados:**

**Intercepto con el eje x:** Para determinar el punto o puntos de corte con el eje x iguala a cero la variable *y*.

$x^3 - 3x + 2 = 0$ resolviendo esta ecuación se obtiene $x = 1$ , $x = -2$

Significa que los interceptos con el eje *x* son: (1; 0) y (– 2; 0)

**Intercepto con el eje y:** Para determinar el punto o puntos de corte con el eje y se iguala a cero la variable *x*.

$y = (0)^3 - 3(0) + 2 = 2$ Significa que el intercepto con el eje y es: (0; 2)

**Crecimiento, decrecimiento, máximos y mínimos**

**Máximos o mínimos absolutos**

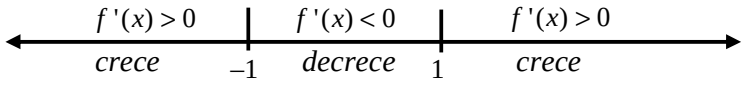
Para hallar los extremos absolutos de una función $f$ continua en [*a*; *b*]:
**1.** Halle los valores de $f$ en los puntos críticos de $f$ en <*a*, *b*>.
**2.** Halle $f(a)$ y $f(b)$.
**3.** El mayor de los valores obtenidos en los pasos **1** y **2** es el máximo absoluto de $f$ en [*a; b*].
El más pequeño es el mínimo absoluto.

**Primera derivada:** $f(x) = x^3 - 3x + 2 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 3x^2 - 3$

**Valores críticos:** $f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 3 = 0$ resolviendo se obtiene $x = -1$ , $x = 1$

Luego analice el signo de $f'(x)$ (eligiendo valores adecuados para *x*)

$$\begin{cases} x < -1, \text{ un valor puede ser } x = -2 & \Rightarrow \quad f'(-2) = 3(-2)^2 - 3 = 9 > 0 \\ -1 < x < 1 \text{ un valor puede ser } x = 0 & \Rightarrow \quad f'(0) = 3(0)^2 - 3 = -3 < 0 \\ x > 1, \text{ un valor puede ser } x = 2 & \Rightarrow \quad f'(2) = 3(2)^2 - 3 = 9 > 0 \end{cases}$$




Observe que en –1 hay máximo valor relativo y en 1 hay mínimo valor relativo

- El máximo valor es $f(-1) \Rightarrow f(-1) = (-1)^3 - 3(-1) + 2 \Rightarrow f(-1) = 4$ (máximo relativo)
- El mínimo valor es $f(1) \Rightarrow f(1) = (1)^3 - 3(1) + 2 \Rightarrow f(1) = 0$ (mínimo relativo)
- Intervalos de crecimiento: $]-\infty;-1[ \ ; \ ]1,+\infty[$
- Intervalo de decrecimiento: $]-1;1[$

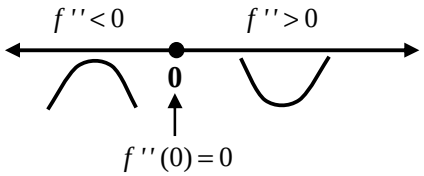
**Concavidad y puntos de inflexión**

Segunda derivada: $f'(x) = 3x^2 - 3 \Rightarrow \quad f''(x) = 6x$

Valores críticos: $f''(x) = 0 \Rightarrow 6x = 0$ resolviendo se obtiene $x = 0$

Luego analice el signo de $f''(x)$ (eligiendo valores adecuados para $x$)

$\begin{cases} x < 0 \text{, un valor puede ser } x = -1 \Rightarrow \quad f''(-1) = 6(-1) = -6 < 0 \\ x > 0 \text{, un valor puede ser } x = 3 \Rightarrow \quad f''(3) = 6(3) = 18 > 0 \end{cases}$

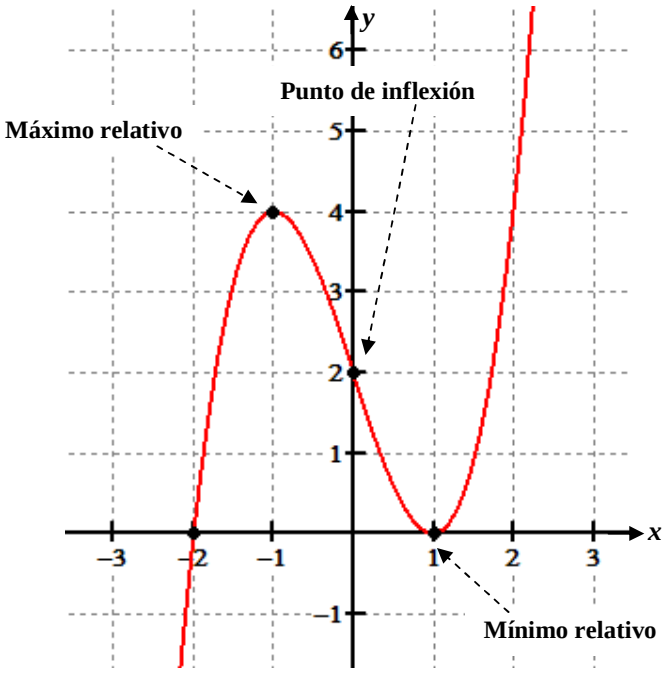



Observe que en $x = 0$ hay cambio de concavidad por lo tanto hay punto de inflexión para $x = 0$

- Intervalo de concavidad hacia arriba: $]0;+\infty[$
- Intervalo de concavidad hacia abajo: $]-\infty;0[$

Punto de inflexión: se remplaza $x = 0$ en $f(x)$

$f(x) = x^3 - 3x + 2 \Rightarrow f(0) = (0)^3 - 3(0) + 2 = 2$ el punto de inflexión es (0;2)



## ACTIVIDAD 11

Dada la función: $f(x) = 5x^3 - 3x^5$

Determine:

a. Intervalos de crecimiento y decrecimiento
b. Intervalos de concavidad hacia arriba o hacia abajo
c. Máximos y mínimos relativos
d. Coordenadas de los puntos de inflexión
e. Gráfica de la función

**Resolución:**

## Optimización de funciones

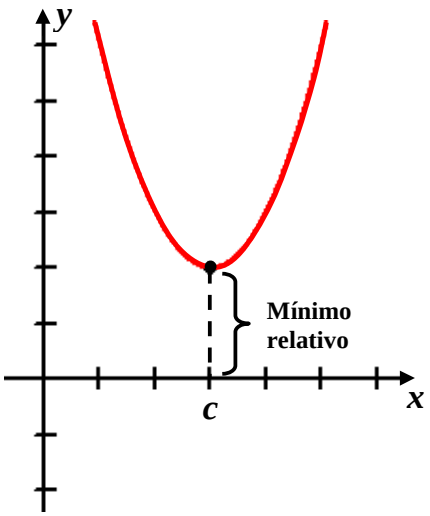
Muchos de los problemas que se presentan en la práctica diariamente, están relacionados de una forma u otra, con encontrar los valores máximos y mínimos de una función de tal forma que satisfagan ciertas condiciones dadas, y más aún, determinar para qué valores de la variable independiente se alcanzan estos. A estos problemas se llaman, en general, problemas de optimización. La solución o soluciones óptimas son aquellas para las cuales se satisfacen las condiciones del problema y el valor de la función sea mínimo o máximo.

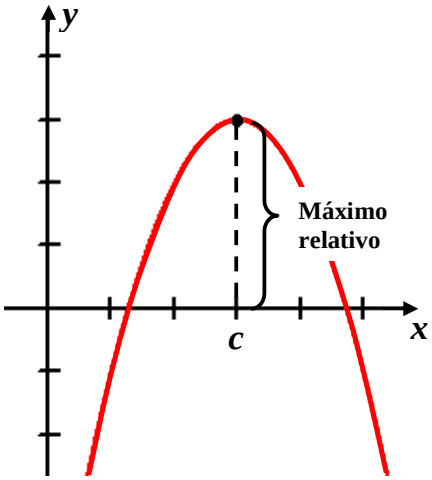
### Criterio de la segunda derivada para valores extremos

Sea c un valor crítico de la función $f$ tal que $f'(c) = 0$ y $f''(x)$ existe para toda $x$ en algún intervalo abierto que contiene $c$.

Si $f''(c) > 0$, entonces $f$ tiene un mínimo relativo en $x = c$.

Si $f''(c) < 0$, entonces $f$ tiene un máximo relativo en $x = c$.




### Problemas de optimización

Para resolver este tipo de problemas se recomienda seguir la siguiente estrategia:

- Comprender el problema: ¿cuál es la incógnita? ¿cuáles son las cantidades dadas? ¿cuáles son las condiciones dadas?
- Dibujar un diagrama e identificar en él las cantidades dadas y requeridas.
- Introducir una notación. Asignar símbolos a la cantidad que se va a maximizar o minimizar y a las cantidades desconocidas.
- Relacionar las cantidades conocidas y desconocidas mediante ecuaciones.
- Eliminar variables hasta expresar la cantidad requerida en términos de una variable.
- Aplicar los métodos estudiados (criterio de la primera derivada o criterio de la segunda derivada) para hallar el máximo o el mínimo absoluto de la cantidad requerida

**Ejemplo 1:**

La virulencia de cierta bacteria se mide en una escala de 0 a 50 y viene expresada por la función $v(t) = 40 + 15t - 9t^2 + t^3$, donde $t$ es el tiempo(en horas) transcurrido desde que comenzo el estudio ($t$ = 0). Determine los instantes de máxima y mínima virulencia en las 6 primeras horas y los intervalos en que esta crece y decrece.

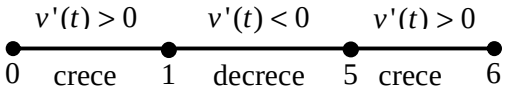
**Resolución:**

Observe que en este caso ya la función a optimizar es dato del problema, además como en el problema dice "..determine los instantes de máxima y mínima virulencia en las 6 primeras horas.." significa que los valores de t están en el intervalo $[0;6]$.

Función: $v(t) = 40 + 15t - 9t^2 + t^3$

Primera derivada: $v'(t) = 15 - 18t + 3t^2$

$v'(t) = 0 \quad \Rightarrow 15 - 18t + 3t^2 = 0$ resolviendo se obtiene $t = 1 \vee t = 5$ (valores críticos)




Del análisis realizado se puede deducir:

La función $v(t)$ crece en $]0;1[\,;\,]5;6[$ significa que la virulencia crece desde que inicia hasta la primera hora y entre la quinta y sexta hora.

La función $v(t)$ decrece en $]1;5[$ significa que la virulencia decrece entre la primera y quinta hora.

Para $t$ = 1 hay máximo valor relativo y para $t$ = 5 hay mínimo valor relativo

Para determinar al máximo o mínimo absoluto evaluamos la función en los valores críticos y en los extremos del intervalo dado.

$v(t) = 40 + 15t - 9t^2 + t^3$

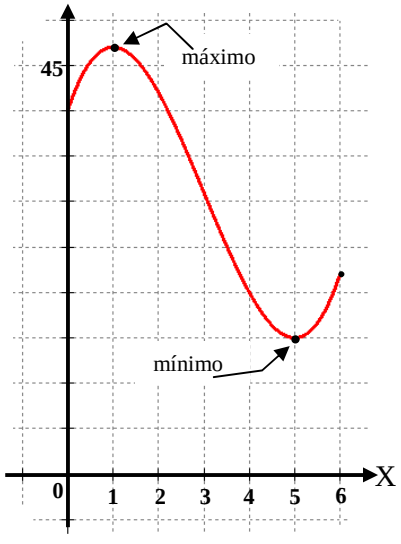
$t = 0 \Rightarrow v(0) = 40 + 15(0) - 9(0)^2 + (0)^3 \Rightarrow v(0) = 40$

$t = 1 \Rightarrow v(1) = 40 + 15(1) - 9(1)^2 + (1)^3 \Rightarrow v(1) = 47$

$t = 5 \Rightarrow v(5) = 40 + 15(5) - 9(5)^2 + (5)^3 \Rightarrow v(5) = 15$

$t = 6 \Rightarrow v(6) = 40 + 15(6) - 9(6)^2 + (6)^3 \Rightarrow v(6) = 22$

De los valores hallados se deduce que la máxima virulencia se produce en $t$ = 1, es decir en la primera hora y la mínima virulencia se produce para $t$ = 5, es decir en la quinta hora.

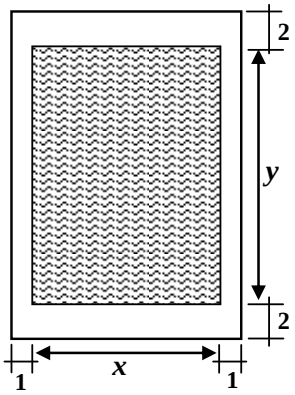


**Ejemplo 2:**

Una hoja de papel debe tener 18 $cm^2$ de texto impreso, márgenes superior e inferior de 2 cm de altura y márgenes laterales de 1 cm de anchura. Determine las dimensiones de la parte impresa que minimizan la superficie de la hoja de papel.

**Resolución:**

En este caso es importante interpretar el problema mediante un gráfico.




Sean $x$ e $y$ las dimensiones de la parte impresa de la hoja, entonces las dimesions de la hoja son: $(x + 2)$ e $(y + 4)$.

Dato " … una hoja de papel debe tener 18 $cm^2$ de texto impreso.." entonces : $x \cdot y = 18$ ……(I)

Pregunta: "…determine las dimensiones que minimizan la superficie de papel.." entonces se deduce que se desea minimizar el área de la hoja de papel por lo tanto reprsentamos el área como S y aplicamos la fórmula para calcular el área del rectángulo.

$$S = (x+2)(y+4) \text{ ……..(II)}$$

Toda esta expresión debe estar en términos de una sola variable, entonces

De (I) se despeja y obteniendo: $y = \dfrac{18}{x}$

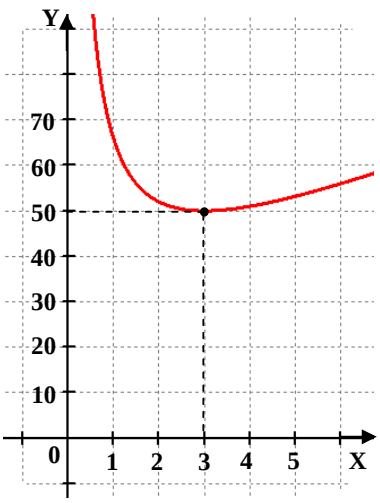
Se reemplaza en (II) y se opera: $S(x) = (x+2)\left(\dfrac{18}{x}+4\right)$

Multiplicando y simplificando se obtiene: $S(x) = 4x + \dfrac{36}{x} + 26$

Aplicamos el criterio de la primera derivada: $S'(x) = 4 - \dfrac{36}{x^2}$

$S'(x) = 0 \Rightarrow 4 - \dfrac{36}{x^2} = 0$ resolviendo se obtiene $x = -3$ o $x = 3$.

Dado que $x$ representa a una longitud entonces debe ser positiva por lo tanto $x = 3$




Aplicamos el criterio de la segunda derivada para determinar si en $x = 3$ hay máximo o mínimo.

$S''(x) = \dfrac{72}{x^3}$ para x = 3 $\Rightarrow S''(3) = \dfrac{72}{(3)^3} > 0$ como

$S''(3) > 0$ significa que en este valor la función tiene mínimo valor.

**Respuesta:** Las dimensiones de la parte impresa para que el área del papel sea mínima son 3 cm y 6 cm.

## ACTIVIDAD 12



Una empresa tiene capacidad de producir como máximo 15 000 unidades al mes de cierto producto. El costo total de producción CT(q) en miles de dólares por mes responde a la expresión $CT(q)=\frac{1}{3}q^3-\frac{15}{2}q^2+36q+81$,donde $q$ es el número de unidades producidas en miles de unidades por mes. Determine la producción mensual que minimiza el costo total de producción y calcula ese costo.

**Resolución:**

## ACTIVIDAD 13



Se va a construir una cisterna rectangular con base y tapa cuadrada para almacenar 12 000 pies cúbicos de agua. Si el concreto para construir la base y los lados tiene un costo de $ 100 por pie cuadrado y el material para construir la tapa cuesta $ 200 por pie cuadrado ¿determine cuáles son las dimensiones de la cisterna que minimizan el costo de su construcción y cuál es dicho costo?

**Resolución:**

# UNIDAD IV

# La Integral

## Contenido

- La antiderivada. La integral indefinida. Definición
- Propiedades de la integral indefinida.
- Integrales indefinidas básicas.
- La integral definida. Teorema fundamental del cálculo. Propiedades.
- Técnicas de integración: Sustitución, por partes y fracciones parciales.
- Interpretación geométrica de la integral definida.
- Área de una región bajo una curva.
- Volumen de un sólido de revolución: método del disco, método de la arandela



Fuente: http://www.biografiasyvidas.com/

Gottfried Wilhelm Von Leibniz (1646-1716). Fue uno de los grandes matemáticos de la historia, su gran descubrimiento es el Cálculo Infinitesimal, es un descubrimiento que lo hizo paralelamente a que realizó Newton, fue un descubrimiento simultáneo en formas distintas y además las notaciones eran diferentes: la de Leibniz es la que ha prevalecido, a lo largo de la historia.

## Objetivos

Al final del capítulo el alumno debe:

- Entender el concepto de la antiderivada más general.
- Utilizar la antiderivada en problemas de movimiento rectilíneo uniforme.
- Aplicar el teorema fundamental del cálculo para evaluar una integral definida.
- Interpretar la integral definida en términos de áreas de regiones.
- Aplicar las propiedades básicas de la integral definida.
- Aplicar la regla de sustitución para resolver integrales indefinidas y definidas.
- Usar la técnica de integración por partes para calcular una integral.
- Calcular integrales de funciones racionales mediante la descomposición en fracciones parciales.
- Calcular el área de regiones entre curvas regulares mediante integrales.
- Calcular el volumen de sólidos de revolución.

## INTRODUCCIÓN

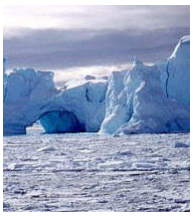
Para un ingeniero es importante conocer la causa de un efecto, por ejemplo si S(t) es una magnitud física, geométrica, económica, etc , que depende del tiempo, la derivada S´(t) o ds/dt nos indica la rapidez con que varía S en el instante t. Si se conoce S(t), es muy fácil encontrar su velocidad instantánea (basta con derivar). En este capítulo vamos a estudiar el problema inverso, es decir, si conocemos la velocidad de una partícula S´(t) ¿qué hacer para obtener su posición S(t) en un instante dado ?, es decir cuál es la función antes de derivar o conocida también como integral indefinida.

La idea fundamental para la integral definida se encuentra en el límite de una suma, trabajada en forma similar al problema de la tangente y la velocidad para introducir la derivada.

Por ejemplo, conocer la temperatura de un cuerpo en cualquier instante, si esta cambia con cierta rapidez es un problema que podremos resolver aplicando la integral.

**También….**

Si una población P al cabo de t meses cambia a razón de $5e^t$ habitantes por mes es decir $\frac{dP}{dt} = 5e^t$, mediante la integral podremos conocer la población dentro de cierto número de años.



El deshielo de los glaciares

La temperatura de un cuerpo en un horno.





La temperatura de erupción de un volcán.

## LA ANTIDERIVADA

En la unidad anterior**,** nuestro objetivo era determinar la derivada de una función $f$, es decir, se conocía $f(x)$ y queríamos conocer $f\,'(x)$, ahora realizaremos el proceso inverso es decir conociendo la función $f\,'(x)$, buscaremos obtener $f(x)$. Así por ejemplo si $f(x)= 3x^2+5x+1$ se tiene que $f\,'(x)=6x+5$, es decir $f(x)= 3x^2+5x+1$, es la función " antes de derivar" la función $f\,'(x)=6x+5$, y le llamaremos **antiderivada.** Como pueden haber muchas antiderivadas por ejemplo: $3x^2+5x+2$, $3x^2+5x+5/3$,.., etc. También son antiderivadas de la función $f\,'(x)=6x+5$. Al conjunto de funciones que representa a todas las antiderivadas la llamaremos antiderivada general.

**Definición**

Una **antiderivada** $F(x)$ de una función $f(x)$, es una función cuya derivada es $f(x)$, es decir se cumple $F'(x)=f(x)$, para todo $x \in \Re$ .

A la **Antiderivada general** también se le llama **integral indefinida** y se indica simbólicamente por: $\int f(x)dx$

Donde:

- El símbolo $\int$ se llama integral.
- La función $f(x)$ se llama integrando.
- El símbolo d$x$ nos indica que $x$ es la variable de integración.

**Nota:**

1. $\int f(x)dx$ :
Se lee como "la integral indefinida de $f(x)$ respecto a $x$"

2. $\int f(x)dx$
*es un conjunto de funciones;* no es una función sola, ni un número.

**Ejemplo 1**

1. $\int 2xdx = x^2 + C$ La integral indefinida de $2x$ respecto a $x$ es $x^2 + C$

2. $\int \cos 2xdx = \frac{1}{2}\operatorname{sen}2x + C$ La integral indefinida de cos2x respecto a $x$ es $\frac{1}{2}\operatorname{sen}2x + C$

**Conclusión:** Si $F(x)$ es la antiderivada general de $f(x)$, es decir : $F'(x)=f(x)$

Se tiene: $\int f(x)dx = F(x) + C$

La constante C se denomina *constante de integración*; es una constante *arbitraria* porque se le puede asignar cualquier valor

**Ejemplos:**

Calcule la antiderivada o integral indefinida de las funciones siguientes:

1. $f(x) = 6x^2 + 4$

2. $f(x) = 7$

3. $f(x) = \frac{3}{x} + 2x$

4. $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$

5. $f(x) = 3\cos 2x + 2$

**Resolución:**

1. Se tiene $\int f(x)\,dx = \int \left(6x^2 + 4\right)dx = 2x^3 + 4x + C$, ya que

$$F'(x) = \frac{d}{dx}\left(2x^3 + 4x + C\right) = 6x^2 + 4$$

2. $\int 7dx = 7x + C$, ya que $F'(x) = \frac{d}{dx}(7x + C) = 7$

3. $\int \left(\frac{3}{x} + 2x\right) dx = 3\ln x + x^2 + C$, ya que $F'(x) = \frac{d}{dx}\left(3\ln x + x^2 + C\right) = \frac{3}{x} + 2x$.

4. $\int \frac{x}{x^2+1}dx = \ln\left(\frac{x}{x^2+1}\right) + c$, ya que $F'(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right) + c\right) = \frac{x}{x^2+1}$

5. $\int \left(3\cos 2x + 2\right)dx = \frac{3}{2}\text{sen}\left(2x\right) + 2x + c$,

ya que $F'(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{3}{2}\text{sen}\left(2x\right) + 2x + c\right) = 3\cos 2x + 2$

**ACTIVIDAD 1**

Resuelva las siguientes integrales indefinidas:

1. $\int \left(-5e^{x}+3\right)dx =$

2. $\int \left(2\cos x-\frac{2}{x}+3x^{3}-6\right)dx =$

3. $\int \left(x^{4}+x^{-2}-\operatorname{sen} x+6\right)dx =$

4. $\int \left(x^{7}-2x^{3}+5x\right)dx =$

5. $\int \left(e^{-x}+3x^{-1}-7x^{2}+x\right)dx =$

Hallar la antiderivada de una función de varios términos a la vez en la mayoría de los casos es complicado, con las siguientes propiedades podemos desdoblarla en varias integrales más sencillas:

**Propiedades de linealidad de la integral indefinida:**

1. $\int \big(f(x) \pm g(x)\big)dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$
2. $\int cf(x)dx = c\int f(x)dx, \quad c \in \Re$

**Ejemplo:**

Calcule la integral:

$$\int\left(\cos x + \frac{2}{x} - 3x^2 + 1\right)dx$$

**Resolución:**

Aplicando la propiedad 1 y 2 tenemos:

$$\int\left(\cos x + \frac{2}{x} - 3x^2 + 1\right)dx = \int \cos x dx + 2\int \frac{1}{x}dx - \int 3x^2 dx + \int 1dx$$

reconociendo la antiderivada general de cada una de las funciones tenemos:

$$= (sen x + c_1) + (2\ln|x| + c_2) - (x^3 + c_3) + (x + c_4)$$

$$= sen x + 2\ln|x| - x^3 + x + (c_1 + c_2 - c_3 + c_4)$$

$$= sen x + 2\ln|x| - x^3 + x + c$$

Las constantes han sido agrupadas en una sola, lo cual nos sugiere que la constante debe considerarse al final del proceso de integración

## TABLA DE INTEGRALES INDEFINIDAS BÁSICAS

**1.** $\int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + c$, n racional, $n \neq -1$

**2.** $\int k dx = kx + c$

**3.** $\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + c$

**4.** $\int e^x dx = e^x + c$

**5.** $\int \ln x dx = x\ln x - x + c$

**6.** $\int \text{sen}\, x dx = -\cos x + c$

**7.** $\int \cos x dx = \text{sen}\, x + c$

**8.** $\int \tan x dx = -\ln|\cos x| + c$

**Ejemplos:**

Calcular las siguientes integrales indefinidas

1. $\int \frac{dx}{x^7}$

**Resolución**

$\int \frac{dx}{x^7} = \frac{1}{-6} x^{-7+1} + c = -\frac{1}{6} x^{-6} + c$ empleando la tabla prop. 1

2. $\int \left(5x^6 - 3x^4 + 2x - 4\right) dx$

**Resolución**

$$\int \left(5x^6 - 3x^4 + 2x - 4\right) dx = 5\left(\frac{1}{7} x^7\right) - 3\left(\frac{1}{5} x^5\right) + 2\left(\frac{1}{2} x^2\right) - 4x + c$$

$$= \frac{5}{7} x^7 - \frac{3}{5} x^5 + x^2 - 4x + c$$

3. $\int \left(\frac{x^2 sen7x + 5x - x^2 e^x}{x^2}\right) dx$

**Resolución**

$$\int \left(\frac{x^2 \operatorname{sen} 7x + 5x - x^2 e^x}{x^2}\right) dx = \int \left( \frac{x^2 \operatorname{sen} 7x}{x^2} + \frac{5x}{x^2} - \frac{x^2 e^x}{x^2} \right) dx$$

$= \int \left( sen7x + \frac{5}{x} - e^x \right) dx = = \frac{1}{7} sen7x + 5\ln|x| - e^x + c$, empleando la tabla

**ACTIVIDAD 2**

Calcule las siguientes integrales indefinidas:

**1.** $\int \left(2x^5 + 4x^3 - 3x^{1/2} - 4x + 1\right) dx =$

**2.** $\int \left(2x^{-3/2} - \text{sen}(2x) + 3x^{-1} + e^{x+1} - \sqrt{2}\right) dx =$

**3.** $\int \left(2u^4 + 3\cos u - e^{2u} + \frac{1}{u}\right) du =$

Verifique mediante derivación las siguientes igualdades:

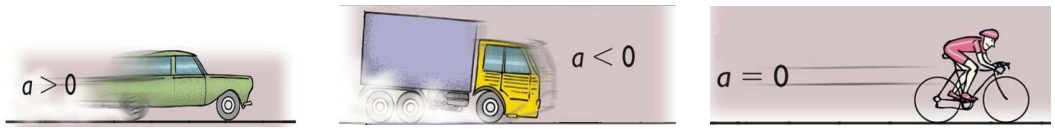
4. $\int \ln(x+1)\text{d}x = (x+1)\ln(x+1) - x + c$

5. $\int \text{e}^{\text{x}} \cos(\text{x})\, dx = \frac{e^x \cos x + e^x \text{sen}x}{2} + c$

## APLICACIÓN: MOVIMIENTO RECTILÍNEO DE UN MÓVIL

Si un móvil se mueve en línea recta con una determinada aceleración $a(t)$ para un tiempo *t*, entonces la velocidad $v(t)$ se obtiene integrando la aceleración y si integramos la velocidad, obtenemos la posición del móvil $s(t)$, es decir:

$$v(t) = \int a(t)dt, \qquad s(t) = \int v(t)dt$$




Fuente: http://xaccnic.blogspot.com/

**Problema:**

Una partícula se mueve en línea recta con una aceleración de $a(t) = 3t^2 - t + 4$ medida en m/s$^2$ para $t \geq 0$. Halle la velocidad inicial si se sabe que $s(0) = 1\,\text{m}$, $s(1) = 4$ m, siendo $s(t)$ la posición de la partícula en un tiempo *t*.

**Resolución:**

Obteniendo la velocidad: $v(t) = \int a(t)dt = \int \left(3t^2 - t + 4\right)dt =$

Obteniendo la posición de la partícula:

$$s(t) = \int v(t)dt =$$

Hallamos las constantes reemplazando $s(0) = 1\,\text{m}$, $s(1) = 4$ m

Finalmente la velocidad inicial es: $v(0) =$

**Respuesta:**

La velocidad inicial de la partícula es de:

**ACTIVIDAD 3**

1. Una partícula se mueve en línea recta con una aceleración de $a(t) = 12t^2 - 6t + 4$ medida en m/s$^2$ para $t \geq 0$. Halle la velocidad inicial si se sabe que su posición inicial es de dos metros ($s(0) = 2$ m ), y que después de un segundo es 5 metros ($s(1) = 5$ m ), siendo $s(t)$ la posición de la partícula en un tiempo t.

**Resolución:**

2. La aceleración de una partícula que sigue una trayectoria rectilínea está dada por $a(t) = \left(t^3 - \cos t\right)$ m/s$^2$, determine la función de posición s(t), si la velocidad en el punto inicial es $v(0) = -1$ m/s y su posición al inicio es $s(0) = 2$ m**.**

**Resolución:**

# LA INTEGRAL DEFINIDA

## El problema de calcular el área bajo una curva

Para calcular el área de regiones de figuras conocidas como el circulo, rectángulo, cuadrado, etc se tienen fórmulas ya establecidas en la geometría plana, pero ¿qué fórmula? se puede aplicar para calcular el área de la región bajo una curva y = $f(x)$ de $a$ a $b$ donde $f(x) \geq 0$, veamos cómo se puede originar esto:

Sea R la región bajo la curva y = $f(x)$ , para $x \in [a,b]$, donde $f$ es continua y $f(x) \geq 0$ (ver figura 1). Empezamos por dividir el intervalo $[a,b]$en $n$ franjas rectangulares $A_1$, $A_2$,…,$A_n$ de igual ancho $\Delta x$.

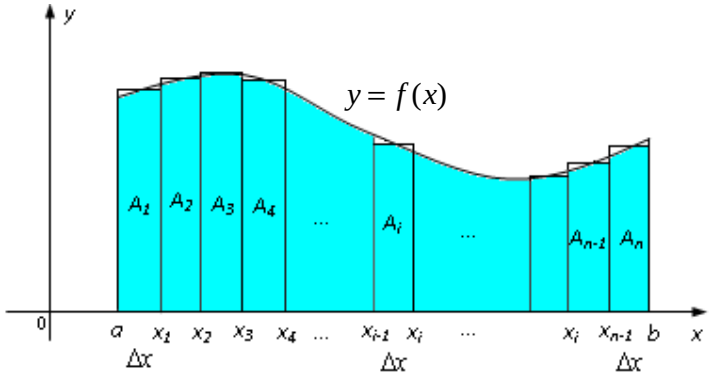



Figura 1

El área de la región R que está bajo la gráfica de la función continua $f$ es el límite de la suma de los rectángulos de aproximación:

$$A = \lim_{n\to\infty}\left[f(x^*_1)\Delta x + f(x^*_2)\Delta x + f(x^*_3)\Delta x + \ldots + f(x^*_i)\Delta x + \ldots + f(x^*_n)\Delta x\right]$$

$$A = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x^*_i)\Delta x$$

Donde $x^*_i$ es cualquier número del $i$-ésimo subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$.

**Observación:**
El concepto de integral permite calcular longitudes de curvas , volúmenes de sólidos, centros de masa, el trabajo que realiza una fuerza, etc.

**Es decir:**
La integral definida es el límite especial que tiene la forma:
$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x^*_i)\Delta x$
A la sumatoria
$\sum_{i=1}^{n} f(x^*_i)\Delta x$
se le conoce como Suma de Riemman.

**Definición**
Si $f$ es una función continua en $[a,b]$. Entonces la integral definida de $f$, desde $x = a$ hasta $x = b$, se escribe $\int_a^b f(x)dx$ , y se define como: $\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x^*_i)\Delta x$

## Teorema Fundamental del Cálculo (Regla de Barrow)

Sea $f$ una función continua en un intervalo cerrado $[a,b]$ y sea $F$ una antiderivada de $f$ entonces se cumple: $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b$

**Ejemplos:**

**Observación**

Para calcular la integral definida de $f$ primero calculamos una antiderivada F, para finalmente evaluar $F$ en $b$ y $a$ y obtener la diferencia $F(b)-F(a)$

Calcule las siguientes integrales definidas:

1. $\int_1^2 \left(-\frac{4}{3}x^2+4x\right)dx$

**Resolución:**

$$\int_1^2 \left(-\frac{4}{3}x^2+4x\right)dx=\left(-\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{3}x^3+4\cdot\frac{1}{2}x^2\right)\Big|_1^2=\left(-\frac{4}{9}x^3+2x^2\right)\Big|_1^2$$

$$=\left(-\frac{4}{9}(2)^3+2(2)^2\right)-\left(-\frac{4}{9}(1)^3+2(1)^2\right)=\frac{26}{9}$$

2. $\int_0^{\pi}(2x+\cos x)dx$

**Nota:**

En la integral definida no es necesario colocar la constante de integración por que esta se elimina, veamos:

$\int_a^b f(x)dx=(F(x)+c$

$=(F(b)+c)-(F(a)+$

$=F(b)-F(a)$

**Resolución:**

$$\int_0^{\pi}(2x+\cos x)dx=\left(x^2+senx\right)\Big|_0^{\pi}=\left(\pi^2+sen\pi\right)-\left(0^2+sen0\right)=\pi^2$$

**3.** $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \text{sen}\, x\, dx$

**Resolución:**

$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \text{sen}\, x\, dx=\frac{1}{2}$, este tipo de integrales fácilmente lo podemos calcular haciendo uso de una calculadora, ingresando en la pantalla de edición la función sin($x$) y colocando como límites de integración los valores de 0 y $\frac{\pi}{3}$ para finalmente calcular su valor.

**Observación:**

La integral definida la podemos calcular directamente haciendo uso de la calculadora



**ACTIVIDAD 4**

a) Calcule el valor de las siguientes integrales definidas:

1. $\int_1^4 (3x^2 - 2x + 4)dx =$

2. $\int_0^1 \left(e^{-2x} + x - 1\right)dx =$

3. $\int_0^1 \left((x+2)^2 - 3e^{2x} + 2\operatorname{sen} x\right)dx =$

b) Calcule el valor de las siguientes integrales definidas utilizando la calculadora:



4. $\int_0^{\frac{\sqrt{\pi}}{2}} x\cos\left(x^2\right)dx =$

5. $\int_0^2 x\, e^{x^2-4}dx =$

# TÉCNICAS DE INTEGRACIÓN

**Nota**
La integración por sustitución es el equivalente a la derivación mediante la regla de la cadena, donde debemos realizar un cambio de variable.

El cálculo de derivadas, por sus procedimientos mecánicos y el empleo de fórmulas es algo sencillo, sin embargo no resulta así su proceso inverso, la integración, que requiere de algunas técnicas para su cálculo, veamos algunas de ellas.

## 1. Integración por sustitución

Si $u = g(x)$ es una función derivable cuyo rango es un intervalo $I$ y $f$ es continua sobre $I$, entonces para calcular la integral:

$$\int f(g(x))\cdot g'(x)dx$$

Realizamos el cambio de variable u = g($x$), entonces se tiene: $\frac{du}{dx} = g'(x)$

de donde podemos definir al diferencial de u, $du = g'(x)\,dx$

Esto nos permite transformar una integral "algo complicada " en otra integral más sencilla de calcular:

$$\int f(g(x))\cdot g'(x)dx = \int f(u)du$$

Para integrales definidas se tiene: $$\int_a^b f(g(x))\cdot g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du$$

Pero al hacer el cambio $u$ = g(x), hay que cambiar también los límites de integración.

**Ejemplos:**

Calcule las siguientes integrales:

1. $\int \text{tsen}(2\text{t}^2+3)\text{dt}$

**Nota**
Recordemos que el diferencial de $u = f(t)$, es:
$du = f'(t)\,dt$

**Resolución:**

1. Haciendo el cambio $u = 2t^2+3$, se tiene $du = 4t\,dt$, reemplazando en la integral propuesta:

$$I = \int \text{tsen}(2\text{t}^2+3)\text{dt} = \int \text{tsen}(2\text{t}^2+3)\text{dt} = \frac{1}{4}\int 4\text{tsen}(2\text{t}^2+3)\text{dt} =$$

$$= \frac{1}{4}\int \text{sen}u\text{du} = \frac{1}{4}(-\cos u) + c$$

Finalmente reponiendo la variable inicial.

$$I = -\frac{1}{4}\cos u + c = -\frac{1}{4}\cos\left(2t^2+3\right) + c$$

2. $I = \int \text{sen}^3 x \cos x \, dx$

**Resolución:**

Resolviendo esta integral por sustitución, sea $u = senx$ se tiene: $du = \cos x dx$

Reemplazando en la integral

$$I = \int u^3 du = \frac{u^4}{4} + C$$

Regresando a la variable original: $I = \frac{sen^4 x}{4} + C$

3. $I = \int_1^e \frac{(1+\ln x)^2}{x} dx$

**Resolución:**

Haciendo el cambio $t = 1 + \ln x$, tenemos: $dt = \frac{1}{x} dx$

Reemplazando en el integrando, se tiene: $I = \int_1^e \frac{(1+\ln x)^2}{x} dx = \int_a^b t^2 dt$

Hallando los límites de integración en la nueva variable

- si $x$ =1, se tiene que $t$ =1, es decir $a$=1
- si $x$=$e$, se tiene que $t$ =2, es decir b=2

Finalmente la integral será $I = \int_1^2 t^2 dt = \frac{1}{3} t^3 \Big|_1^2 = \frac{7}{3}$

**ACTIVIDAD 5**

Calcule las siguientes integrales:

1. $\int x^2 \cdot \left(x^3 - 2\right)^4 dx =$

2. $\int \frac{x+2}{\sqrt{x^2+4x}} dx =$

3. $\int e^x \sqrt{1+e^x}\, dx =$

4. $\int \frac{6x}{\sqrt[3]{3x^2-3}}\, dx =$

5. $\int_1^e \frac{\ln\sqrt{x}}{x} dx =$

## 2. Integración por partes

Al derivar un producto, se tiene

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f(x)g'(x) + g(x)f'(x)$$

En la integración esta regla se convierte en

$$\int [f(x)g'(x) + g(x)f'(x)]dx = f(x)g(x)$$

$$\int f(x)g'(x)\,dx + \int g(x)f'(x)\,dx = f(x)g(x)$$

Esta ecuación se puede reordenar como:

$$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)\,dx \qquad *$$

Si hacemos : $u = f(x)$ y $v = g(x)$

La fórmula dada por *, se transforma en:

$$\int udv = uv - \int vdu$$

siendo esta presentación más fácil de recordar.

**Observación**

Toda regla de derivación tiene una regla de integración correspondiente. La regla que corresponde a la regla del producto para derivación se llama: ***regla de integración por partes.***

**Ejemplos:**

Calcule las siguientes integrales:

1. $\int 2xe^x dx$

**Resolución:**

Buscando los cambios para integra por partes:

Haciendo : $u = 2x \quad \Rightarrow \quad du = 2dx$

$dv = e^x dx \quad \Rightarrow \quad v = e^x$

Luego la integral resulta:

$$I = \int 2xe^x dx = \int udv = uv - \int vdu$$

Reponiendo el cambio, tenemos:

$$I = 2xe^x - \int e^x 2dx = 2xe^x - 2e^x + c$$

2. $\int x \ln x dx$

**Resolución:**

Haciendo los cambios: $u = \ln x \implies du = \frac{1}{x} dx$

$$dv = x\,dx \implies v = \frac{1}{2} x^2$$

Reemplazando en la integral resulta:

$$I = \int x \ln x\, dx = \int u dv = uv - \int v du$$

Reponiendo los cambios

$$I = \frac{1}{2} x^2 \ln x - \int \frac{1}{2} x^2 \left( \frac{1}{x} dx \right) = \frac{1}{2} x^2 \ln x - \int \frac{1}{2} x dx = \frac{1}{2} x^2 \ln x - \frac{1}{4} x^2 + c$$

3. $\int x \cos x dx$

**Resolución:**

Haciendo los cambios: $u = x \implies du = dx$

$$dv = \cos x\, dx \implies v = sen x$$

Reemplazando en la integral resulta:

$$I = \int x \cos x\, dx = \int u dv = uv - \int v du$$

Reponiendo los cambios

$$I = x\,\text{sen}\, x - \int \text{sen}\, x\, dx = x \,\text{sen}\, x + \cos x + c$$

**ACTIVIDAD 6**

Calcule las siguientes integrales

1. $\int xe^{-3x}dx =$

2. $\int tsen(2t)dt =$

3. $\int_1^2 (x^2-1)\ln(x)dx =$

## 3. Integración por descomposición en fracciones parciales.

Esta técinca permite integrar funciones racionales expresándolas como suma de fracciones más simples, llamadas fracciones parciales, que son integrables directamente.

Se llama **función racional** a una función de la forma: $f(x)=\dfrac{p(x)}{q(x)}$

$f$ es una fracción propia si el grado de $p(x)$ es menor que el grado de $q(x)$, caso contrario se dice que es impropia.

Si el denominador $q(x)$ es un producto de factores de primer grado distintos, es decir:

$$q(x)=(x-x_1)(x-x_2)...(x-x_n)$$

Entonces $f(x)$ se expresa como:

$$f(x)=\frac{A_1}{x-x_1}+\frac{A_2}{x-x_2}+...+\frac{A_n}{x-x_n}$$

Siendo $A_1, A_2,\ldots, A_n$ constantes que se deben encontrar mediante polinomios equivalentes.

**Ejemplos:**

1. Descomponer en fracciones parciales $f(x)=\dfrac{3x+1}{x^2-2x-15}$ y calcule $\displaystyle\int \frac{3x+1}{x^2-2x-15}\,dx$

**Resolución:**

$\dfrac{3x+1}{x^2-2x-15}=\dfrac{3x+1}{(x-5)(x+3)}$ Factorizando el denominador por aspa simple

$\dfrac{3x+1}{(x-5)(x+3)}=\dfrac{A}{x-5}+\dfrac{B}{x+3}$ Descomposición en fracciones por ser el denominador un producto de factores de primer grado.

$\dfrac{3x+1}{(x-5)(x+3)}=\dfrac{A(x+3)+B(x-5)}{(x-5)(x+3)}$ Efectuando operaciones en el segundo miembro

$3x+1=A(x+3)+B(x-5)$ Igualando numeradores.

Asignando valores a $x$ en la ecuación para hallar las constantes A y B:

Si $x=-3$: $3(-3)+1=A(-3+3)+B(-3-5)$ se tiene: $B=1$

Si $x=5$: $3(5)+1=A(5+3)+B(5-5)$ se tiene: $A=2$

Con lo cual:

$$f(x)=\frac{3x+1}{x^2-2x-15}=\frac{2}{x-5}+\frac{1}{x+3}$$

**Recuerde**

$$\int \frac{A}{x+a}dx = A\ln|x+a|+c$$

Finalmente calculando la integral: $\int \frac{3x+1}{x^2-2x-15}dx$

Se tiene: $\int \frac{3x+1}{x^2-2x-15}dx=\int\left(\frac{2}{x-5}+\frac{1}{x+3}\right)dx=\int\frac{2}{x-5}dx+\int\frac{1}{x+3}dx$

**Nota**

En una división de polinomios se tiene:

**D(x)=d(x) q(x)+r(x)**

donde:

D(x)= dividendo

d(x)= divisor

q(x)= cociente

r(x)= residuo

o también:

$$\frac{D(x)}{d(x)}=q(x)+\frac{r(x)}{d(x)}$$

hallando cada integral obtenemos:

$$\int \frac{3x+1}{x^2-2x-15}dx = 2Ln|x-5|+Ln|x+3|+c$$

2. Descomponga en fracciones parciales $f(x)=\frac{x^3-x+2}{x^2+2x-3}$ y calcule

$$I=\int\left(\frac{x^3-x+2}{x^2+2x-3}\right)dx$$

**Resolución:**

Efectuamos la división de polinomios en $\frac{x^3-x+2}{x^2+2x-3}$ y aplicando $\frac{D(x)}{d(x)}=q(x)+\frac{r(x)}{d(x)}$

con el fin de transformar la fracción impropia $\frac{x^3-x+2}{x^2+2x-3}$

en una que contenga como términos una fracción propia.

Se tiene: $\frac{x^3-x+2}{x^2+2x-3}=x-2+\frac{6x-4}{x^2+2x-3}$

Descomponiendo en fracciones parciales: $\frac{6x-4}{x^2+2x-3}$

$$\frac{6x-4}{x^2+2x-3}=\frac{6x-4}{(x-1)(x+3)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+3}$$

Hallando A y B de: $6x-4=A(x+3)+B(x-1)$ se tiene: $A=\frac{1}{2}$ y $B=\frac{11}{2}$

Entonces tendremos: $\frac{x^3-x+2}{x^2+2x-3}=x-2+\frac{1/2}{x-1}+\frac{11/2}{x+3}$

Finalmente calculamos la integral: $I = \int \left( \frac{x^3 - x + 2}{x^2 + 2x - 3} \right) dx$

Empleando la descomposición realizada tendremos:

$$I = \int \frac{x^3 - x + 2}{x^2 + 2x - 3}\, dx = \int \left( x - 2 + \frac{1/2}{x-1} + \frac{11/2}{x+3} \right) dx$$

Hallando la integral de cada término resulta:

$$I = \frac{1}{2}x - 2x + \frac{1}{2}\ln|x-1| + \frac{11}{2}\ln|x+3| + c$$

3. Calcule la integral: $I = \int \left( \frac{4}{x^2 + 5x + 6} \right) dx$

**Resolución:**

Descomponiendo la fracción en fracciones parciales e integrando:

$$I = \int \left( \frac{4}{x^2 + 5x + 6} \right) dx = \int \left( \frac{4}{x+2} - \frac{4}{x+3} \right) dx = 4\ln|x+2| - 4\ln|x+3| + c$$

4. Calcule la integral definida: $\int_1^3 \left( \frac{x^2 - 3x + 1}{x^2 + 4x + 3} \right) dx$ 

**Resolución:**

Calculando el valor de la integral, haciendo uso de:

$$\int_1^3 \left( \frac{x^2 - 3x + 1}{x^2 + 4x + 3} \right) dx = -0{,}119$$

**ACTIVIDAD 7**

Calcule las siguientes integrales:

1. $\int \left( \frac{x-1}{x^2+3x+2} \right) dx =$

2. $\int \left( \frac{x^2-x+1}{x^2+x} \right) dx =$

3. $\int_2^4 \left( \frac{3x-2}{x^2+5x+4} \right) dx =$



# APLICACIONES DE LA INTEGRAL DEFINIDA

La integral definida se origina para calcular el área bajo la gráfica de una función,

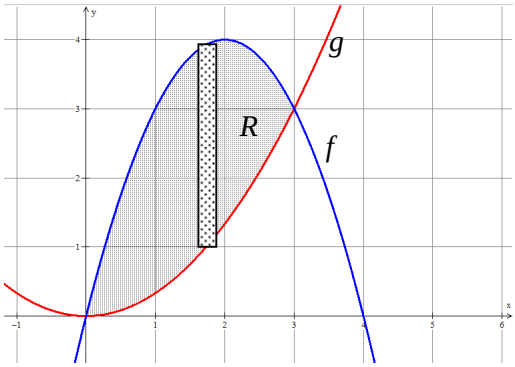
en este proceso la aproximación nos lleva a una suma del $\sum_{i=1}^{n} f(x^*_i)\Delta x$ tipo:

Conocida como Suma de Riemman y por un paso al límite, llegamos al concepto de

$\int_a^b f(x)dx$ Integral , es interesante observar que una Suma de Riemman surge en ocasiones, tales como el trabajo efectuado por una fuerza, cálculo de volúmenes, longitud de una curva, centros de masa, etc. Esta es la razón por la cual la presencia de la integral es tan extendida.

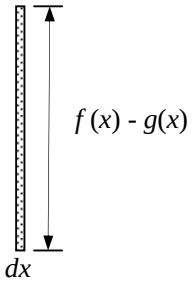
## I. CÁLCULO DE ÁREAS DE REGIONES PLANAS

Se dice que una región es regular respecto al eje x, si dentro de la región se puede determinar una sección trasversal perpendicular al eje x, la cual este limitada superiormente por una función *f* e inferiormente por una función *g* (ver grafica).




Región R con sección transversal perpendicular al eje x.

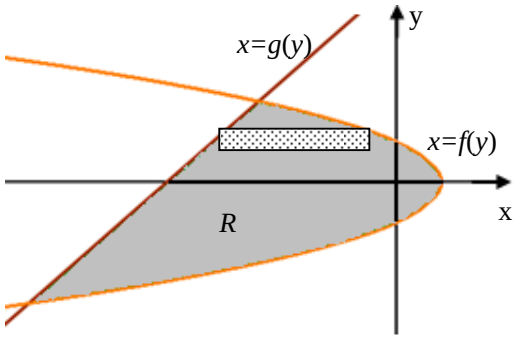
Entonces el área de la región R se determina hallando un elemento diferencial de área, determinada por el área de la sección transversal, es decir:



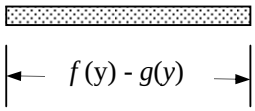

Elemento diferencial de área: $dA=[f(x) - g(x)]dx$

Siendo finalmente el área de la región R: $A(R)=\int_a^b [f(x)-g(x)]\,dx$

Si la región es regular respecto al eje y, es decir si dentro de la región R se puede determinar una sección transversal perpendicular al eje y, la cual este limitada por la derecha por una función $f$ donde $x = f(y)$ y por la izquierda por una función $g$ donde $x = g(y)$, el diferencial de área se determina mediante:




Elemento diferencial de área



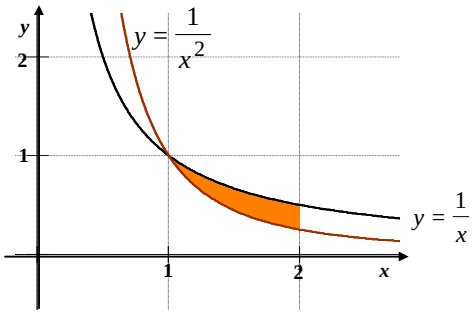

diferencial de área: $dA=[f(y) - g(y)]dy$

Finalmente el área de la región R es: $$A(R)=\int_c^d [f(y)-g(y)]\ dy$$

**Ejemplos:**

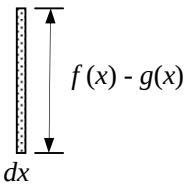
1. Determine el área de la región sombreada, la que se encuentra entre las curvas:

$y = \frac{1}{x}, y = \frac{1}{x^2}$




**Resolución:**

El elemento diferencial de área será:

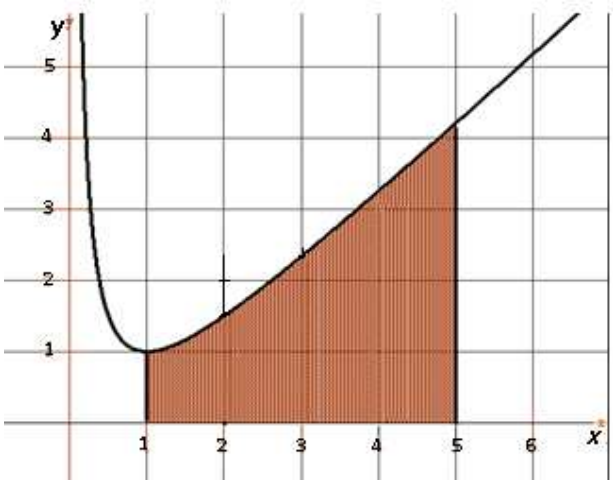



El diferencial de área es: $dA = \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right)dx$

El área será: $A = \int_1^2 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right)dx = 0{,}193\ u^2$

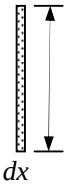


2. Determine el área de la región sombreada, comprendid entre la curva $y = x + \frac{1}{x} - 1$, el eje $x$ y las rectas $x = 1$ y $x = 5$.




**Resolución:**

El elemento diferencial de área es:



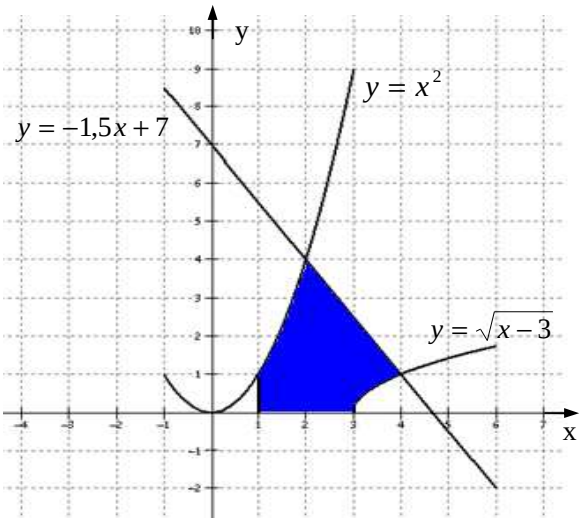

$f(x) = x + \frac{1}{x} - 1$

El diferencial de área es: $dA = \left( x + \frac{1}{x} - 1 \right) dx$

El área de la región sombreada será: $A = \int_1^5 \left( x + \frac{1}{x} - 1 \right) dx = 9{,}609\, u^2$



3. Calcule el área de la región sombreada, en la gráfica:



**Resolución:**

Se divide la región en tres partes: $1 \le x \le 2$; $2 \le x \le 3$ y $3 \le x \le 4$

Dado que en cada una de las partes se tienen curvas diferentes, luego el área será:

$$A = \int_1^2 \left(x^2\right)dx + \int_2^3 \left(-1{,}5x + 7\right)dx + \int_3^4 \left(-1{,}5x + 7 - \sqrt{x-3}\right)dx$$

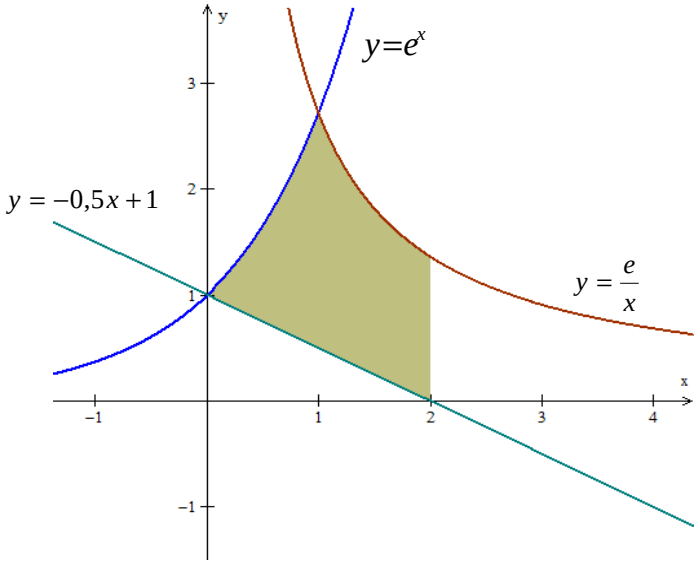


Calculando cada integral definida:

$$A = \frac{7}{3} + \frac{13}{4} + 1{,}08333 = \ 6{,}666$$

Finalmente el área de la región sombreada es: $6{,}666\ u^2$

4. Determine el área de la región sombreada de la figura adjunta:




**Resolución:**

La región sombreada la separamos en dos partes: $0 \le x \le 1$ y $1 \le x \le 2$

Luego el área será:

$$A = \int_0^1 \left(e^x - \left(-0{,}5x + 1\right)\right)dx + \int_1^2 \left(\frac{e}{x} - \left(-0{,}5x + 1\right)\right)dx$$

Calculando cada integral definida:



$A = 0{,}968 + 1{,}634 = 2{,}602$

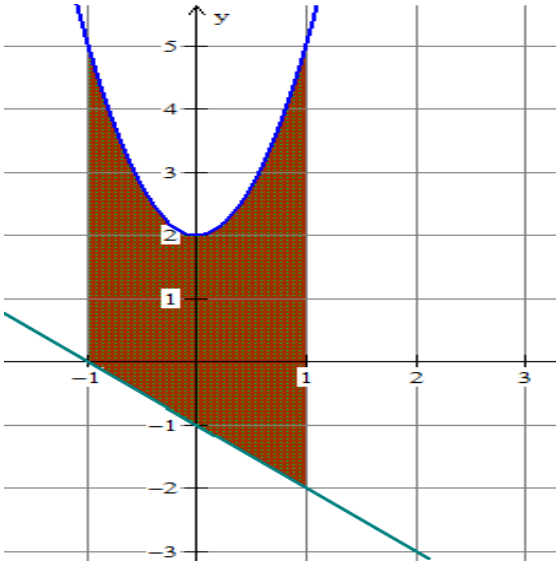
El área de la región sombreada es $2{,}602\ u^2$

5. Halle el área de la región limitada por las gráficas de:

$$y = 3x^2 + 2;\ y = 1 - x;\ x = -1\ y\ x = 1$$

**Resolución**:

Graficamos la región:




El área de la región sombreada es: $A = \int_{-1}^{1} \left(3x^2 + 2 - (-x - 1)\right) dx = 8\ \text{u}^2$



**ACTIVIDAD 8**

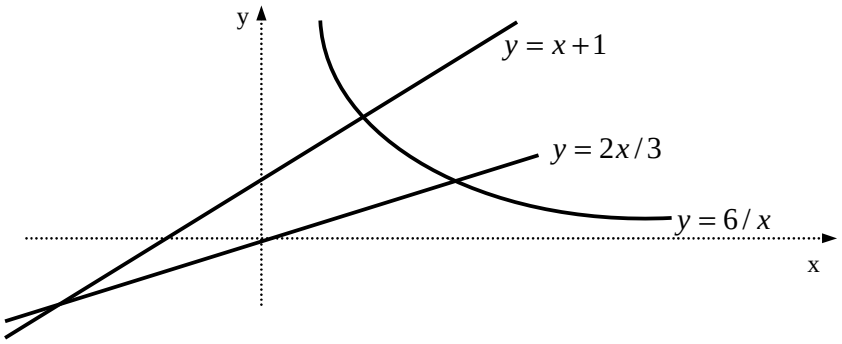
1. Determine el área de la región encerrada por el eje *x* y la gráfica de la función $f$ cuya regla de correspondencia es $f(x) = -x^2 + 6x - 5$.

**Resolución:**

2. Halle el área de la región limitada por las curvas $y = \frac{x^2}{3}$ y $y = -x^2 + 4x$.

**Resolución:**

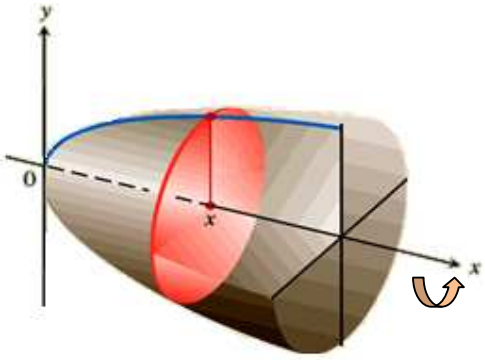
3. Determine el área de la región limitada por la gráfica de las curvas:




**Resolución:**

## II. VOLUMEN DE UN SÓLIDO DE REVOLUCIÓN

Un sólido de revolución es el que se obtiene al girar una región del plano alrededor de una recta del plano llamada *eje de revolución*.

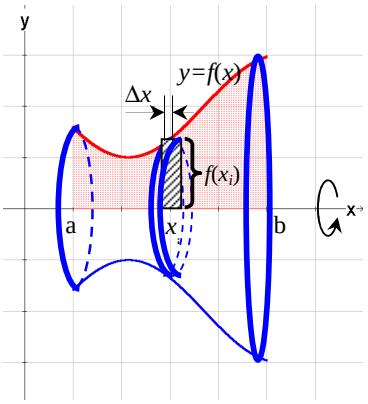



### MÉTODO DEL DISCO

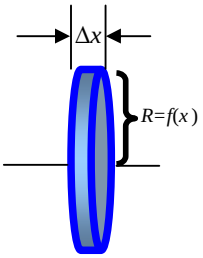
El método del disco consiste en dividir en n partes de igual ancho d*x la región que gira alrededor del eje x, dando así origen al sólido de revolución* formado por la gráfica de la función continua $f$ en el intervalo $[a, b]$ y $f(x) \geq 0$. Estas divisiones determinan en el sólido n discos cuya suma se aproxima al volumen del mismo.

Teniendo en cuenta que el volumen de un disco es $\Delta v = \pi [f(x)]^2 \Delta x$, la suma de Riemann asociada a la partición y que da un volumen aproximado del sólido es: $\sum_{i=1}^{n} \pi \left[ f(x^*_i) \right]^2 \Delta x$

obteniendo así a la integral que determina el volumen del solido de revolución, al girar alrededor del eje x la región limitada por la curva $y = f(x)$, las rectas $x=a$, $x=b$ y el eje x.




Elemento diferencial de volumen




El diferencial de volumen es:

$$\Delta V = \pi \left[ f(x^*_i) \right]^2 \Delta x$$

El volumen será: $V = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \pi \left[ f(x^*_i) \right]^2 \Delta x$

Es decir:

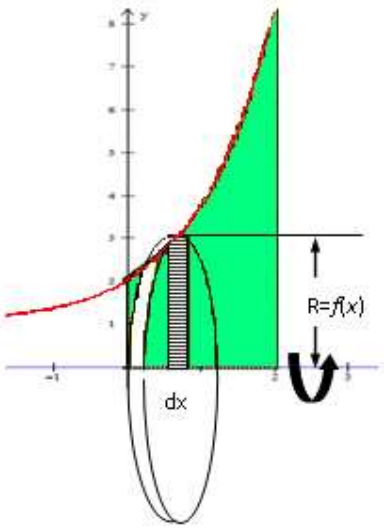
$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$$

**Ejemplos:**

**1.** Determine el volumen que se origina al hacer girar alrededor del eje x la región encerrada por la gráfica de $f(x)=e^x+1$, el eje *y* y la recta *x*=2.

**Resolución:**

Graficando la región limitada por las curva de $f(x)=e^x+1$, el eje *y* y la recta $x=2$, y mostrando el elemento diferencial de volumen al girar la región respecto al eje x.




R: Radio del disco diferencial de volumen

El diferencial de volumen es: $dv = \pi[f(x)]^2\,dx$

Luego el volumen será:

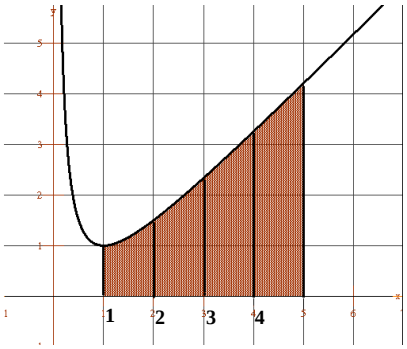
$$V = \pi\int_0^2 (e^x+1)^2\,dx$$



$$V = 130{,}61\ u^3$$

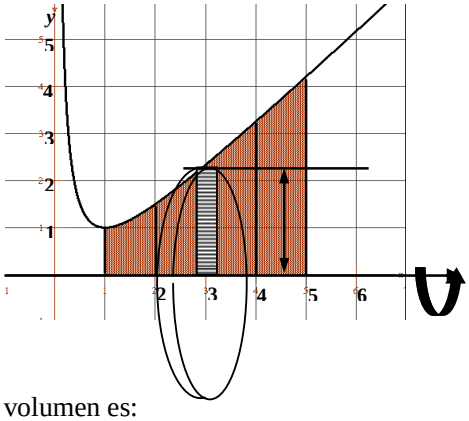
**Respuesta:** El volumen del sólido generado es de aproximadamente 130,61 $u^3$.

**2.** Determine el volumen del sólido que se genera al girar la región sombreada de la gráfica adjunta, la cual está limitada por la gráfica de la función *f* donde $f(x)=x+\frac{1}{x}-1$, el eje x y las rectas $x=1$ y $x=5$, al girar alrededor del eje x.



**Resolución:**

Mostrando el elemento diferencial de volumen en la gráfica:



El diferencial de volumen es:

$$dV = \pi R^2 \, dx$$

$$dV = \pi f^2(x) \, dx$$

Luego el volumen es:

$$V = \pi \int_1^5 \left( x + \frac{1}{x} - 1 \right)^2 dx$$

$$V = 84{,}55 \text{ u}^3$$

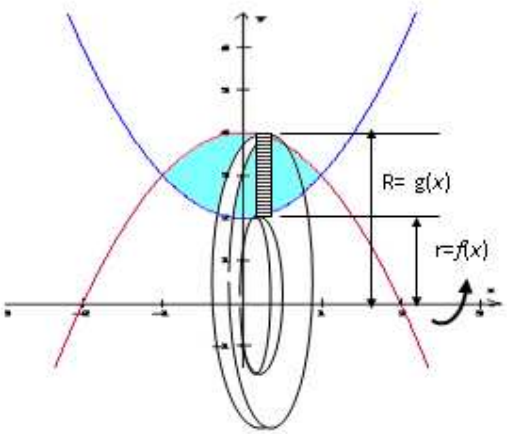
**Respuesta:** El volumen del sólido es de aproximadamente 84,55 $u^3$.

**3.** La región D encerrada por las curvas $y = -x^2 + 4$, $y = x^2 + 2$ , gira alrededor del eje *x*. Determine el volumen del sólido que resulta.

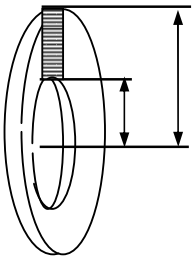
**Resolución:**

Sean las funciones *f* y *g* tales que: $f(x) = x^2 + 2$ y $g(x) = -x^2 + 4$

Graficando la región limitada por las curvas de *f* y *g* y mostrando el elemento diferencial de volumen:



Del elemento diferencial de volumen se tiene:



$$dV = \pi \left[R^2 - r^2\right] dx$$

$$dV = \pi \left[g^2(x) - f^2(x)\right] dx$$

Luego el volumen será: $V = \pi \int_{-1}^{1} \left[\left(-x^2 + 4\right)^2 - \left(x^2 + 2\right)^2\right] dx$



$$V = 16\pi$$

**Respuesta:** El volumen del sólido generado es de $16\pi$ u$^3$.

**ACTIVIDAD 9**

**1.** Grafique la región R encerrada por las curvas $y = x^2 - x\,;\, y = x - x^2$ , y determine el volumen del sólido que se forma al girar alrededor del eje *x* de la región R.

**2.** Determine el volumen del sólido que se forma al girar alrededor del eje x la región encerrada por las curvas $y = x^2 + 1,\ y = \sqrt{x} + 1$.

**3.** Determine el volumen obtenido al hacer girar alrededor del eje x, la región encerrada por las curvas $y = e^x,\ y = 2$ y el eje y.

**4.** Grafique la región R encerrada por las curvas $y = e^x - 1; y = 1; x = 0$ y calcule el volumen del sólido que se genera al girar la región R alrededor del eje x.

**5.** Dadas las curvas $y = x^2 + 2$, $y = 2x^2 + 1$. Determine el volumen que se originan al hacer girar la región encerrada por las curvas alrededor del eje x.

# UNIDAD V

# Vectores

## Contenido:

- Definición de vector
- Definición de magnitud, dirección y sentido
- Interpretación geométrica.
- La ley del paralelogramo
- Producto escalar de vectores
- Vectores unitarios
- Producto vectorial de vectores

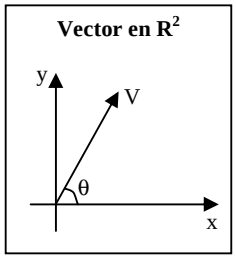
## Objetivos:

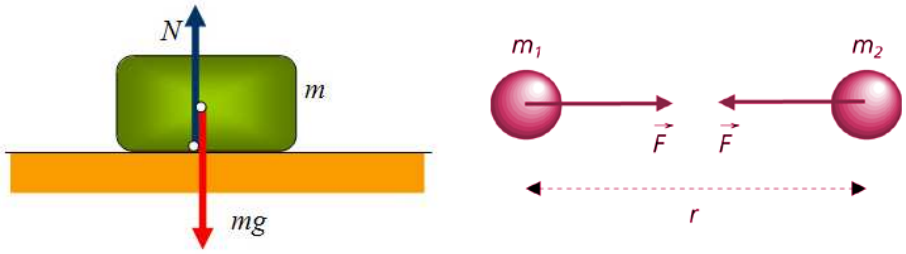
- Define un vector geométricamente.
- Reconoce un vector en el plano y en el espacio.
- Realiza operaciones con vectores.
- Reconoce e identifica vectores paralelos.
- Define el producto escalar de vectores.
- Define el producto vectorial de vectores
- Calcula el ángulo entre dos vectores

## Introducción

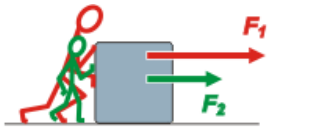
En física un **vector** (también llamado vector euclidiano o vector geométrico) es una herramienta geométrica utilizada para representar una magnitud física definida por su módulo (o longitud), su dirección (u orientación) y su sentido (que distingue el punto inicial del punto final). Los vectores se pueden representar geométricamente como segmentos de recta dirigidos («flechas») en el plano o en el espacio .Son ejemplos de magnitudes vectoriales: la velocidad con que se desplaza un móvil, ya que no queda definida tan sólo por su módulo (lo que marca el velocímetro, en el caso de un automóvil), sino que se requiere indicar la dirección hacia la que se dirige. La fuerza que actúa sobre un objeto, ya que su efecto depende, además de su intensidad o módulo, de la dirección en la que opera. El desplazamiento de un objeto.

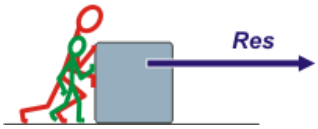
**Vector** es un término que deriva de un vocablo latino y que significa **"que conduce"**. Un vector es un **agente que transporte algo de un lugar a otro**. Su significado, de todas formas, varía de acuerdo al contexto.




Fuente: http://elmundodelafisica.wikispaces.com/El+peso+de+los+cuerpos




Fuente: http://neuro.qi.fcen.uba.ar/ricuti/No_me_salen/CINEMATICA/AC_vectores.html

## Definición de vector

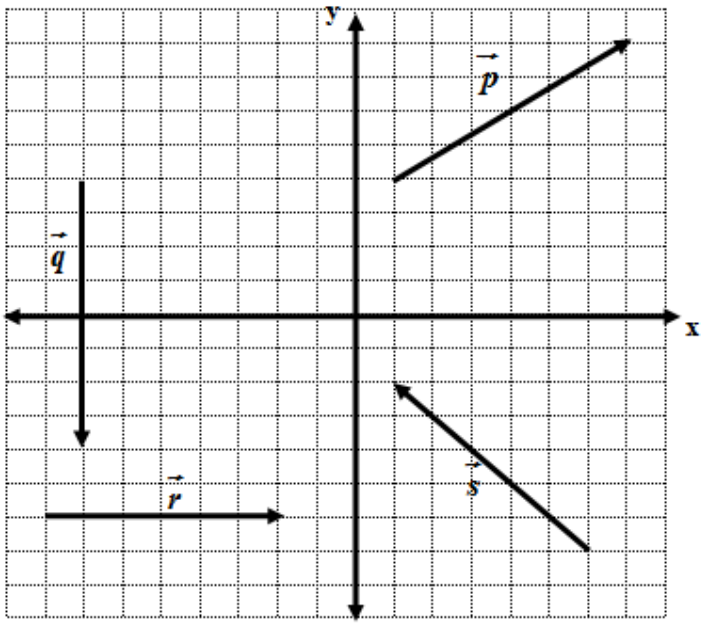
**Observación**
Algunos autores denotan los vectores con letra mayúscula y una flecha en el cabezal $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$, etc.

Se llama vector a todo segmento de recta orientado en el que se distingue un punto inicial y un punto final.

La notación que usaremos será una letra minúscula y una flecha en el cabezal como $\vec{p}$, $\vec{b}$, $\vec{a}$, $\vec{q}$, etc. o una letra minúsculas negritas **a** ,**b**, **p**, **q**, etc.

Un vector se determinará de la siguiente manera: $\vec{a}$ = punto final menos el punto inicial.

**Ejemplo:** Determine los vectores $\vec{p}$, $\vec{b}$, $\vec{a}$ y $\vec{q}$ de la figura mostrada




**Resolución:**

El punto inicial del vector $\vec{p}$ es (1;4) y su punto final es (7;8) entonces $\vec{p}$ será igual a su punto final menos su punto inicial es decir $\vec{p}$ = (7;8)-(1;4) =(6;4).

De igual manera se procede con los demás vectores $\vec{s}$, $\vec{r}$ y $\vec{q}$.

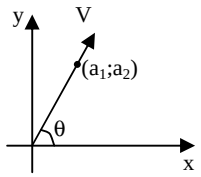
$\vec{s}$ = (1;-2)-(6;-7) = (-5;5)

$\vec{r}$ = (-2; -6)-(-8;-6) = (6;0)

$\vec{q}$ = (-7;-4)-(-7;4) = (0;-8)

**Observación**
Se trabajará con vectores que pueden cambiar su punto inicial, siempre que se conserven la magnitud, dirección y sentido.

**Vector en $R^2$**




## Elementos de un vector

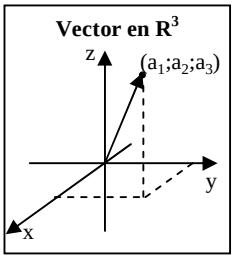
### a) Magnitud

Es la longitud o tamaño del vector.

La longitud de un vector se define de la siguiente manera si

i) $\vec{a} = (a_1; a_2)$ entonces llamaremos la magnitud del vector al número no negativo que se determina de la siguiente manera $\left\|\vec{a}\right\| = \sqrt{(a_1)^2 + (a_2)^2}$

**Vector en $R^3$**




ii) $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ entonces llamaremos la magnitud del vector al número no negativo que se determina de la siguiente manera $\left\|\vec{a}\right\| = \sqrt{(a_1)^2 + (a_2)^2 + (a_3)^2}$

**Ejemplo**:

Determine el módulo del siguiente vector $\vec{a} = (3;4;12)$

**Resolución**:

$$\left\|\vec{a}\right\| = \sqrt{(3)^2 + (4)^2 + (12)^2} \quad = 13$$

## b) Dirección

Viene dada por la orientación en el espacio de la recta que lo contiene.

Si $\vec{r} = (a;b)$ es un vector de $R^2$ , se define la dirección de $\vec{r}$ como el ángulo θ, medido en radianes, que forma el vector con el semieje positivo de las *x* y tal que

$\tan\theta = \dfrac{b}{a} \quad a \neq 0$ con $\quad 0 \leq \theta < 2\pi$ .

**Ejemplo:**

Determine la dirección del vector $\vec{c} = (4;4)$

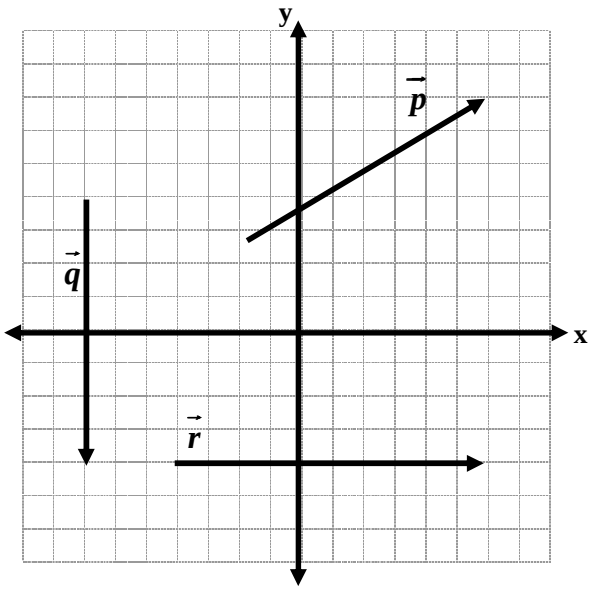
**Resolución:**

$\tan\theta = \dfrac{b}{a} = \dfrac{4}{4} = 1$ entonces la dirección está determinada por el ángulo $\theta = \dfrac{\pi}{4}$ radianes

## c) Sentido

Se indica mediante una punta de flecha situada en el extremo final del vector, indicando hacia qué lado de la línea de acción se dirige el vector.

**Ejemplo:**

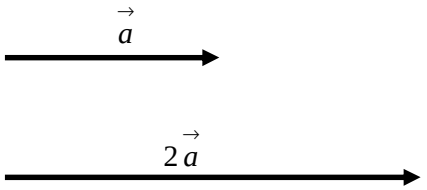



El sentido del vector $\vec{r}$ es hacia la derecha, del vector $\vec{q}$ hacia abajo y del vector $\vec{p}$ es hacia arriba.

**Propiedades**: Sea los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ entonces se cumple lo siguiente:

1. $\vec{a} = \vec{b}$ entonces $a_i = b_i$ para todo *i*.
2. $\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1; a_2 + b_2; ...; a_n + b_n)$
3. Si $\lambda \in R$ entonces $\lambda \vec{a} = (\lambda a_1; \lambda a_2; ...; \lambda a_n)$

**Interpretación geométrica:** Si $\lambda = 2$ significa que el vector $2\vec{a}$ tiene el doble de magnitud del vector $\vec{a}$, pero mantiene su dirección y sentido




**Ejemplo**: Sea los vectores $\vec{a} = (4;6;1)$ y $\vec{b} = (1;2;3)$ determine:

a. $4\vec{b}$
b. $2\vec{a} - 3\vec{b}$

**Resolución:**

a. $4\vec{b} = 4(4;6;1) = (16;24;4)$
b. $2\vec{a} - 3\vec{b} = 2(4;6;1) - 3(1;2;3) = (5;6;-7)$

**Vectores paralelos:** Sea los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ entonces afirmaremos que dichos vectores son paralelos si cumple $\vec{a} = k\vec{b}$.

**Ejemplo**: Dados los vectores $\vec{a} = (2;4;8)$ y $\vec{b} = (1;2;4)$ ¿serán paralelos?

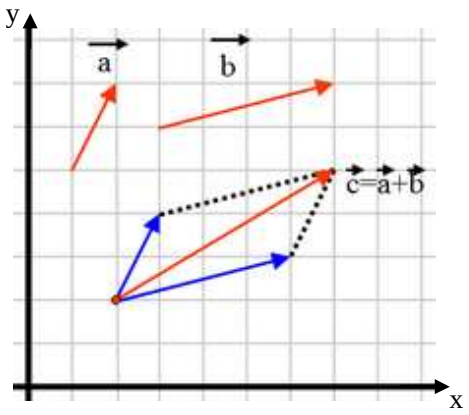
**Resolución**:

Como $(2;4;8) = 2(1;2;4)$ entonces los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son paralelos.

## La ley del paralelogramo

Las cantidades vectoriales no se suman tan simple como las escalares. Así por ejemplo, una velocidad de 2 Km/h sumada con otra velocidad de 3 Km/h, no necesariamente da como resultado 5 Km/h. Para sumar vectores se emplean diferentes métodos: el método del paralelogramo, el método del _triángulo, el método del polígono y el método de las componentes rectangulares. A continuación mostraremos gráficamente el **método del paralelogramo**.

Dados los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ como se muestra en la figura, se traslada paralelamente dichos vectores, buscando un punto inicial común y formamos un paralelogramo con lados paralelos a los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ y trazamos la diagonal como muestra la figura que será el vector $\vec{a}+\vec{b}$.




## Producto escalar de dos vectores

Una de las operaciones más importante con vectores es el producto escalar o producto interior de dos vectores. Aunque la definición es en general para vectores de $R^n$ nos limitaremos a trabajar en $R^2$ y $R^3$ por el momento.

**Definición**: Sean $\vec{a}=(a_1,a_2;a_3;...;a_n)$ **y** $\vec{b}=(b_1,b_2;b_3;...;b_n)$ entonces definiremos el $\vec{a}\bullet\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+...+a_nb_n$ como el producto escalar, notar que es un número real.

**Observación**
Esta propiedad se utiliza determinar el ángulo entre dos vectores.

**Ejemplo**: Determine el producto escalar de los vectores $\vec{a}=(5;4;3)$ **y** $\vec{b}=(3;5;4)$

**Resolución**:

$$\vec{a}\bullet\vec{b}=(5)(3)+(4)(5)+(3)(4)=47$$

**Propiedad**

$\vec{a}\bullet\vec{b}=\left\|\vec{a}\right\|\left\|\vec{b}\right\|\cos\alpha$ , donde $\alpha$ es el ángulo entre los vectores $\vec{a}$ **y** $\vec{b}$.

**Observación**
Si el ángulo que forma los vectores es de 90° entonces el producto escalar es cero.

**Ejemplo:** Determine el ángulo entre los vectores $\vec{a}=(3;4)$ **y** $\vec{b}=(2;5)$

**Resolución:**

Se calcula el producto escalar: $\vec{a}\bullet\vec{b}=(3)(2)+(4)(5)=26$

Luego se calcula los módulos de cada vector: $\left\|\vec{a}\right\|=\sqrt{3^2+4^2}=5$ y $\left\|\vec{b}\right\|=\sqrt{2^2+5^2}=\sqrt{29}$

Aplicando la propiedad $\vec{a} \bullet \vec{b} = \left\|\vec{a}\right\|\left\|\vec{b}\right\| \cos\alpha$ se obtiene: $26 = (5)(\sqrt{29})\cos\alpha$

despejando el coseno tenemos $\cos\alpha = \dfrac{26}{(5)(\sqrt{29})}$ 

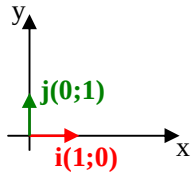
Usando la calculadora determinaremos en forma aproximada el valor de $\alpha \approx 0{,}26$ radianes.

## Vectores Unitarios

En $R^n$ existen determinados vectores que asumen un papel relevante en el álgebra vectorial ellos son los llamados **vectores unitarios**.

Si $\vec{a} \neq \vec{0}$ entonces definiremos el vector unitario en la dirección de $\vec{a}$ como $\vec{u} = \dfrac{\vec{a}}{\left\|\vec{a}\right\|}$

**Vectores unitarios en $R^2$**

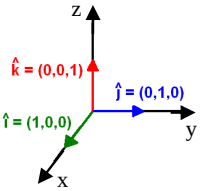



**Ejemplo**: Determine el vector unitario en la dirección del vector $\vec{a} = (1;2;3)$

**Resolución:**

$$\vec{u} = \frac{\vec{a}}{\left\|\vec{a}\right\|} = \frac{(1;2;3)}{\left\|\sqrt{1^2+2^2+3^2}\right\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{14}};\frac{2}{\sqrt{14}};\frac{3}{\sqrt{14}}\right)$$

**Vectores unitarios en $R^3$**




Los vectores unitarios paralelos a los semiejes coordenados positivos se llamarán **vectores canónicos**

- En el espacio bidimensional, los vectores canónicos son: $\vec{i} = (1;0)$ y $\vec{j} = (0;1)$
- En el espacio tridimensional, los vectores canónicos son: $\vec{i} = (1;0;0)$ , $\vec{j} = (0;1;0)$ y $\vec{k} = (0;0;1)$

Ahora cualquier vector de $\mathbf{R^2}$ o $\mathbf{R^3}$ puede escribirse como una suma de vectores canónicos

- En el espacio tridimensional será $\vec{a} = (a_1, a_2; a_3) = a_1\,\vec{i} + a_2\,\vec{j} + a_3\,\vec{k}$
- En el espacio bidimensional será $\vec{a} = (a_1, a_{23}) = a_1\,\vec{i} + a_2\,\vec{j}$

**Producto escalar de vectores unitarios**

$\vec{i}\cdot\vec{i} = \vec{j}\cdot\vec{j} = \vec{k}\cdot\vec{k} = 1$

$\vec{i}\cdot\vec{j} = \vec{j}\cdot\vec{k} = \vec{k}\cdot\vec{i} = 0$

## Producto vectorial de vectores

Sean dos vectores $\vec{a} = (a_1, a_2; a_3)$ y $\vec{b} = (b_1, b_2; b_3)$ en el espacio vectorial $\mathbf{R^3}$.

El producto vectorial entre $\vec{a}$ y $\vec{b}$ se representa por la expresión $\vec{a} \times \vec{b}$ y da como resultado un nuevo vector $\vec{c}$.

Para definir este nuevo vector es necesario especificar su módulo y dirección:

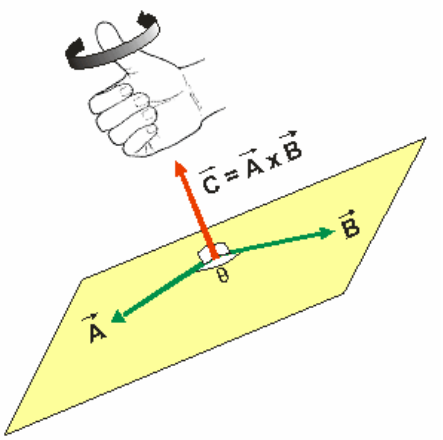
- El **módulo** de $\vec{c}$ está dado por : $\left\|\vec{c}\right\| = \left\|\vec{a}\right\|\left\|\vec{b}\right\| \text{sen}\theta$

donde $\theta$ es el ángulo determinado por los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$

- La **dirección** del vector $\vec{c}$ es perpendicular a los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ a la vez.
- El **sentido** del vector $\vec{c}$ está dado por la regla de la mano derecha.

## Regla de la mano derecha

Ubicamos la palma de la mano derecha en el vector $\vec{A}$ y giramos los dedos de la mano hacia el vector $\vec{B}$, manteniendo el pulgar levantado, la dirección del pulgar será el sentido del producto vectorial $\vec{A} \times \vec{B}$.




**Observación**
El determinante de una matriz de 2x2 se calcula de la siguiente manera:

$$\begin{vmatrix} m & n \\ p & q \end{vmatrix} = mq - np$$

## Definición de producto vectorial

Sean los vectores $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ y $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$. Se define el producto vectorial como

$$\vec{a} \times \vec{b} = \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}; -\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\right)$$

**Producto vectorial**
Dados dos vectores $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ y $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$
Entonces:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

**Ejemplo:** Determine el producto vectorial de los vectores $\vec{a} = (5;4;3)$ y $\vec{b} = (3;5;4)$

**Resolución:**

$$\vec{a} \times \vec{b} = \left(\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}; -\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}\right)$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = (16 - 15; -(20 - 9); 25 - 12)$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = (1; -11; 13)$$

**Producto vectorial vectores unitarios**

$$\vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = 0$$

$$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$$

$$\vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}$$

$$\vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$$

**ACTIVIDAD 1**

**1.** Sea los vectores $\vec{a} = (1;3;5)$ **y** $\vec{b} = (2;5;1)$ determine:

**a.** El producto escalar de los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$**.**

**b.** El ángulo entre los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$**.**

**c.** Un vector unitario en la dirección de $\vec{a}+\vec{b}$ .

**d.** El producto vectorial de los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$**.**

**e.** Un vector perpendicular a los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ con magnitud 5.

**Resolución**:

# RESPUESTAS DE ACTIVIDADES

## UNIDAD 1

### ACTIVIDAD 1 página 7

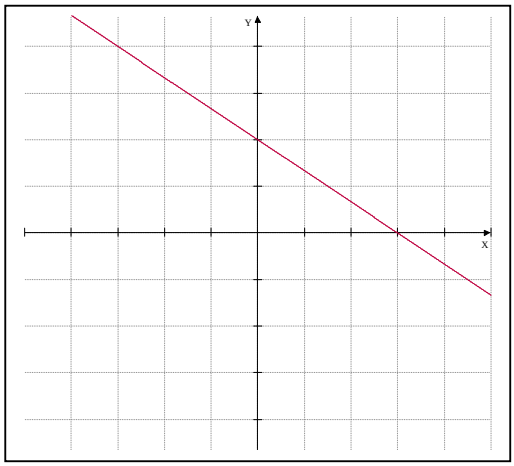
1) Dom $f$ = [0;2] y Rang $f$ = [1;2] .

2) a) Dom $f$ = R  b) Dom $f$ = R – {0;1}  c) Dom $f = ]-\infty;3]$.

### ACTIVIDAD 2 página 12

1) $f(x) = -x + 2$

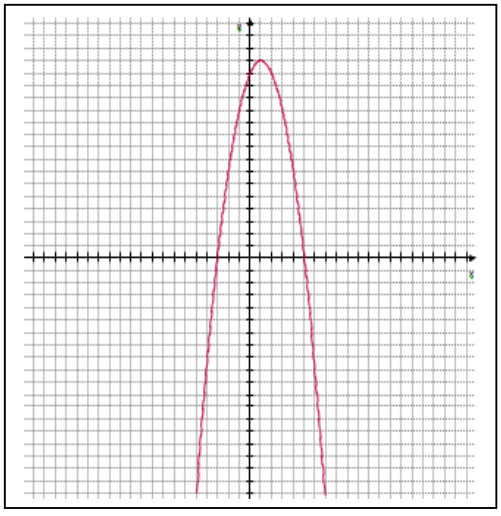
2)




3) a) F  b) F

### ACTIVIDAD 3 página 16

1) a) V(1;16)  b) (0;15) , (5;0) y (-3;0)  c)

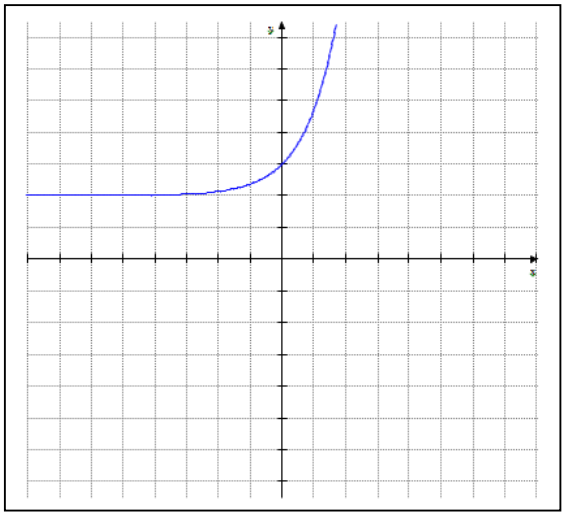


d) Dom $f$ = R , Rang $f = ]-\infty;16]$

2) 36  3)-100

**ACTIVIDAD 4 página 20**

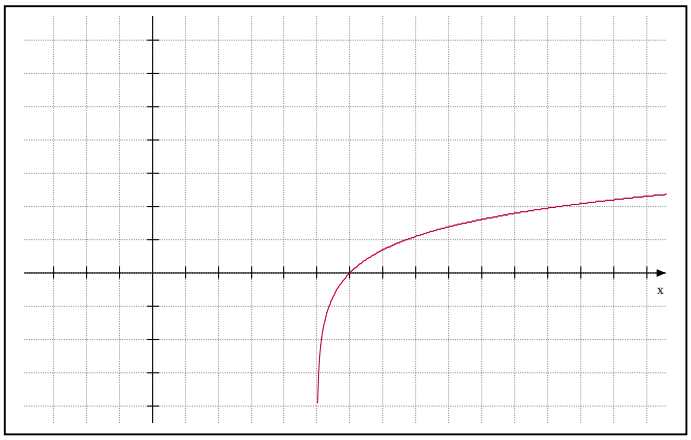
1) Dom $f$ = R , Rang $f$ = $]2;+\infty[$ ,corte con el eje $y$ (0;3) y su ecuación de su asíntota es $\boldsymbol{y}$ =2



2) (4;0)

**ACTIVIDAD 5 página 24**

1) Dom $f$ = $]5;+\infty[$ y Ran $f$ = R**,** su corte con el eje $x$ será (6;0) y la ecuación de su asíntota es $x$ = 5.

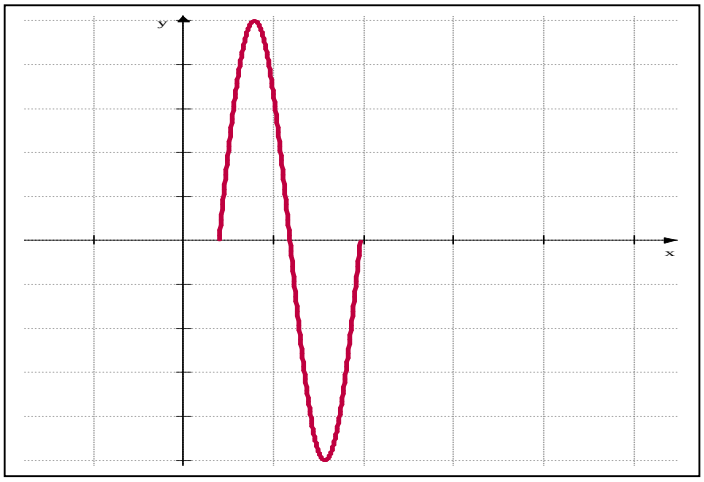


2) $(2-e^{\frac{-1}{3}};0)$

**ACTIVIDAD 6 página 27**

1) Amplitud = 5 , Período = $\frac{\pi}{2}$ ,

desfase = $\frac{\pi}{8}$ , frecuencia = $\frac{2}{\pi}$



## UNIDAD II

**ACTIVIDAD 1 páginas 33 – 34**

1) a) 3/4 b) – 4 /5 c) 4/5

2) a = – 4 y b= 1

**ACTIVIDAD 2 página 39**

Asíntota vertical: $x = 5$ , asíntota horizontal: $y = 1$

## UNIDAD III

**ACTIVIDAD 1 páginas 45 – 46**

a) $f\,'(x) = 2x$ b) $f\,'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$ c) $f\,'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x+4}}$

**ACTIVIDAD 2 página 52**

| | | |
|---|---|---|
| Función constante | $f(x) = k$ | $f\,'(x) = 0$ |
| Función identidad | $f(x) = x$ | $f\,'(x) = 1$ |
| Función potencial de exponente racional | $f(x) = x^n$ | $f\,'(x) = n\,x^{n-1}$ |
| Factor constante | $f(x) = k\,x$ | $f\,'(x) = k$ |
| Derivada de la suma o diferencia de funciones | $f(x) + g(x)$ | $f\,'(x) + g\,'(x)$ |
| Derivada de un producto de funciones | $f(x) \cdot g(x)$ | $f\,'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g\,'(x)$ |
| Derivada de una división de funciones | $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ | $\dfrac{f\,'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g\,'(x)}{(g(x))^2}$ |
| Derivada de la función exponencial | $f(x) = e^x$ | $f\,'(x) = e^x$ |
| Función logaritmo natural | $f(x) = \ln(x)$ | $f\,'(x) = \dfrac{1}{x}$ |
| Función seno | $f(x) = \operatorname{sen}(x)$ | $f\,'(x) = \cos x$ |
| Función coseno | $f(x) = \cos(x)$ | $f\,'(x) = -\operatorname{sen} x$ |

**ACTIVIDAD 3 página 53**

a) $f\,'(x) = 3x^2 - 6x + 5$ b) $g\,'(x) = x^2 \cos x + 2\cos x$

c) $h'(x) = \ln x$ d) $j'(x) = \dfrac{xe^x}{(x+1)^2}$

**ACTIVIDAD 4 página 56**

| | |
|---|---|
| $f(x) = (g(x))^n$ | $f'(x) = n(g(x))^{n-1} \cdot g'(x)$ |
| $f(x) = e^{g(x)}$ | $f'(x) = e^{g(x)} \cdot g'(x)$ |
| $f(x) = \ln(g(x))$ | $f'(x) = \dfrac{g'(x)}{g(x)}$ |
| $f(x) = \text{sen}^n(g(x))$ | $f(x) = n\,\text{sen}^{n-1}(g(x)) \cdot \cos(g(x)) \cdot g'(x)$ |
| $f(x) = \cos^n(g(x))$ | $f(x) = -n\cos^{n-1}(g(x)) \cdot \text{sen}(g(x)) \cdot g'(x)$ |

**ACTIVIDAD 5 página 57**

a) $f\,'(x) = 20(x^4 + 9)^4 x^3$ b) $g\,'(x) = 3x^2 \cos(x^3)$

c) $h\,'(x) = 2xe^{x^2+3}$ d) $f\,'(x) = \dfrac{2}{x^2 - 1}$

**ACTIVIDAD 6 página 59**

a) $f\,''(x) = 6(x+1)$ b) $g\,''(x) = 36(\cos 2x - \text{sen}3x)$ c) $h\,''(x) = 2e^{x2}(x^2 + 1)$

**ACTIVIDAD 7 página 62**

a) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{9 - 2x}{2y}$ b) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{e^x}{1 - e^y}$ c) $x + 4y - 5 = 0$

**ACTIVIDAD 8 página 65 - 66**

a) 2 b) 1/2 c) – 3/2 d) – 1/2 e) 32/27

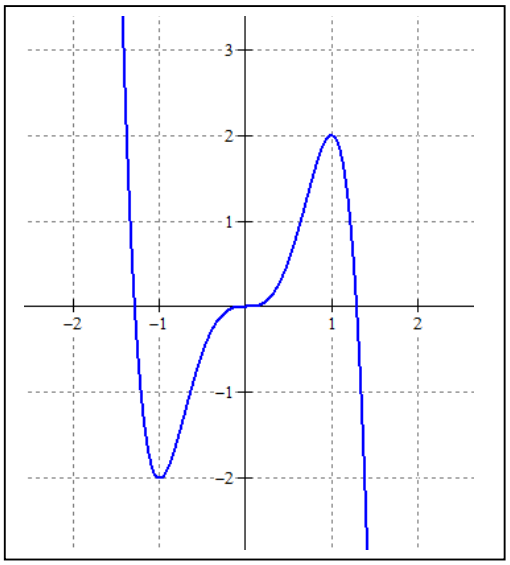
**ACTIVIDAD 9 página 68**

Distancia = 180 m Velocidad = 96 m/s Aceleración = 34 m/s$^2$

**ACTIVIDAD 10 página 72 – 73**

a) 900 cm/s b) 6 pies/s

**ACTIVIDAD 11 página 82**




a) Intervalo de crecimiento: $]-1;1[$ Intervalos de decrecimiento: $]-\infty;-1[, ]1;+\infty[$

b) Intervalo de concavidad hacia abajo:

$$\left]-\frac{1}{\sqrt{2}};0\right[, \left]\frac{1}{\sqrt{2}};+\infty\right[$$

Intervalos de concavidad hacia arriba:

$$\left]-\infty;-\frac{1}{\sqrt{2}}\right[, \left]0;\frac{1}{\sqrt{2}}\right[$$

c) El máximo relativo es 2 y el mínimo relativo es $-2$

d) Puntos de inflexión: $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}};-\frac{7}{4\sqrt{2}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{7}{4\sqrt{2}}\right)$, $(0;0)$

**ACTIVIDAD 12 página 87**

1. Producción mensual mínima: 12000 unidades Costo: 9 000 dólares

2. Las dimensiones son: 20 pies en la base y 30 pies de altura.

El costo mínimo de producción es de $ 360 000

## UNIDAD IV

**ACTIVIDAD 1 página 93**

1. $-5e^{x}+3x+c$

2. $-2\operatorname{sen}x-2\ln x+\frac{3}{4}x^{4}-6x+c$

3. $\frac{1}{5}x^{5}-x^{-1}+\cos x+6x+c$

4. $\frac{1}{8}x^{8}-\frac{1}{2}x^{4}+\frac{5}{2}x^{2}+c$

5. $-e^{-x}+3\ln x-\frac{7}{3}x^{3}+\frac{1}{2}x^{2}+c$

**ACTIVIDAD 2 página 96**

1. $\frac{1}{3}x^{6}+x^{4}-2x^{3/2}-2x^{2}+x+c$

2. $-4x^{-1/2}+\frac{1}{2}\cos(2x)+3\ln x+e^{x+1}-\sqrt{2}x+c$

3. $\frac{2}{5}u^5 + 3\operatorname{sen} u - \frac{1}{2}e^{2u} + \ln u + c$

**ACTIVIDAD 3 página 98**

1. $v(0) = 1$ m/s

2. $s(t) = \frac{1}{20}t^5 + \cos t - t + 1$ m

**ACTIVIDAD 4 página 101**

1. 60

2. -0,068

3. -2,331

4. 0,354

5. 0,491

**ACTIVIDAD 5 página 104**

1. $\frac{1}{15}\left(x^3 - 2\right)^5 + c$

2. $\left(x^2 + 4x\right)^{1/2} + c$

3. $\frac{2}{3}\left(1 + e^x\right)^{3/2} + c$

4. $-2\left(3x^2 - 3\right)^{-1/2} + c$

5. 1,049

**ACTIVIDAD 6 página 107**

1. $-\frac{xe^{-3x}}{3} - \frac{e^{-3x}}{9} + C$

2. $-\frac{x\cos(2x)}{2} + \frac{sen(2x)}{4} + C$

3. 0,684

**ACTIVIDAD 7 página 111**

1. $-2\ln|x+1| + 3\ln|x+2| + C$

2. $x + \ln|x| - 3\ln|x+1| + C$

3. 0,491

**ACTIVIDAD 8 página 117**

1. 10,67 $u^2$

2. 6 $u^2$

3. 4,933 $u^2$

**ACTIVIDAD 9 página 123 - 124**

1. 0,105 $u^3$

2. 3,037 $u^3$

3. 3,998 $u^3$

4. 1,571 $u^3$

5. 15,08 $u^3$

## UNIDAD V

**ACTIVIDAD 1 página 133**

a) 22

b)47,24

c) $\vec{u} = \left( \frac{3}{\sqrt{109}}; \frac{8}{\sqrt{109}}; \frac{6}{\sqrt{109}} \right)$

d)(-22;9;-1)

e) $5\vec{u} = \left( \frac{-110}{\sqrt{566}}; \frac{45}{\sqrt{566}}; \frac{-5}{\sqrt{566}} \right)$